

OM2 : Feuille 5 de TD

Michele Bolognesi ⁽¹⁾

Exercice 1. Une forme différentielle

$$w(x, y) = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

est dite fermée si $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$, et exacte si w est la différentielle d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer qu'une forme exacte est fermée
2. Donner un exemple de forme exacte

Exercice 2. Montrer que les formes différentielles suivantes, en une seule variable, sont exactes:

1. $[4 \sin(x) + e^{3x}]dx$;
2. $(x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 3)dx$;
3. $(\frac{1}{2x+1} - 6x^2)dx$.

Exercice 3. Calculer la différentielles des fonctions suivantes et déterminer les ensembles de définition des formes différentielles ainsi obtenues.

1. $f(x, y) = \ln(x + y) + 7x^3$;
2. $g(x, y) = \frac{1}{x^3+y^2} + \sin(x - 2y)$;
3. $h(x, y) = \frac{\sin(x)}{e^{x-y}-1}$.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle de variable réelle. Montrer que, si

$$z(x, y) = y + f(x^2 - y^2),$$

alors

$$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

¹Département de Mathématiques, CC 051, Université Montpellier II, Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5.
Mail : michele.bolognesi@umontpellier.fr