Mathématiques pour l'EEA, Session 1 - 15/01/2024 - Durée : 2h

Numéro d'anonymat :

- **Calculatrices, téléphones et tout appareil connecté non autorisés.** Barème indicatif
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

Répondez **uniquement dans les cases** de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1. (1-1 pts) Calculer $l_1 = \lim_{x \to \pi/2} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}$ *et* $l_2 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}$ avec la méthode de votre choix.

$l_1 = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(x)}{1-\sin(x)}$ FI $\frac{0}{0}$

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(\cos^2(x))'}{(1-\sin(x))'}$ Hospital

$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos x \sin x}{-\cos x} = 2\sin(\frac{\pi}{2}) = 2$

1

$l_2 = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+1}$

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2+x+1)-(x^2+1)}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}+\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}$

$= \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$

$= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

1

0,5 - 1,5 - 1

Exercice 2. (~~1~~-1-1 pts) Déterminer en justifiant les développements limités suivants :

1) $DL_2(0)$ de $f(x) = \left(1+x^2\right)^{1/3}$

2) $DL_2(0)$ de $f(x) = (3+e^x)^{-1}$

3) $DL_2(4)$ de $f(x) = \ln(5+x)$

1) $DL_2(0)$ $f(x) = (1+x^2)^{1/3}$

on a $(1+u)^n \to 1 + nu$ $\Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{3}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ 0,5

2) $DL_2(0)$ $f(x) = (3+e^x)^{-1} = \dfrac{1}{(3+e^x)}$

$e^x \to 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots$

$(3+e^x) \to \Big(3 + 1 + \underbrace{x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots}_{=u}\Big) = (4+u) = 4\left(1+\frac{u}{4}\right)$

$\dfrac{1}{(3+e^x)} = \dfrac{1}{4\left(1+\frac{u}{4}\right)} = \frac{1}{4}\left[1 - \frac{u}{4} + \left(\frac{u}{4}\right)^2 - \dots\right]$

$= \frac{1}{4} - \frac{u}{16} + \frac{1}{4}\frac{1}{16}u^2 \dots$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16}\left(x + \frac{x^2}{2} \dots\right) + \frac{1}{4}\frac{1}{16}(x)^2 + x^2\varepsilon(x)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16}x - \frac{x^2}{32} + \frac{1}{64}x^2 + x^2\varepsilon(x)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}x^2 + x^2\varepsilon(x).$ 1,5

3) $DL_2(4)$ $f(x) = \ln(5+x).$

$\ln(5+x) = \ln(5+4-4+x) = \ln(9+x-4)$

$= \ln\left(9\left(1+\frac{x-4}{9}\right)\right)$ qd $x \to 4$, $x-4 \to 0$

Soit $u = \frac{x-4}{9}$

$= \ln(9(1+u)) = \ln 9 + \ln(1+u)$

$= \ln 9 + u - \frac{u^2}{2} + u^2\varepsilon(u)$

$= \ln 9 + \frac{x-4}{9} - \frac{1}{2}\left(\frac{x-4}{9}\right)^2 + (x-4)^2\varepsilon(x-4)$

$= \ln 9 + \frac{x-4}{9} - \frac{1}{2}\frac{(x-4)^2}{81} + (x-4)\varepsilon(x-4)$

$= \ln 9 + \frac{x-4}{9} - \frac{(x-4)^2}{162} + (x-4)\varepsilon(x-4)$ 1

Exercice 3. (3 pts) Calculer l'intégrale : $\boldsymbol{I = \int_0^6 \frac{3x+6}{x^2+36}\,dx}$

$$\int_0^6 \frac{3x+6}{x^2+36}\,dx = \int_0^6 \frac{3x}{x^2+36}\,dx + \int_0^6 \frac{6\,dx}{x^2+36}$$

$$* \int_0^6 \frac{3x}{x^2+36}\,dx = \left[\frac{3}{2}\ln|x^2+36|\right]_0^6$$
$$= \frac{3}{2}(\ln 72 - \ln 36) = \frac{3}{2}\ln 2$$

1

$$* \int_0^6 \frac{6\,dx}{x^2+36}$$
$$= \int_0^6 \frac{6\,dx}{x^2+6^2} = \int_0^6 \frac{\cancel{6}\,dx}{6^{\cancel{2}}\left(\frac{x^2}{6^2}+1\right)}$$

on pose $u = \frac{x}{6}$

$du = \frac{1}{6}dx$

$$= \int_0^1 \frac{\cancel{6}\,du}{\cancel{6}(u^2+1)} = \int_0^1 \frac{du}{(u^2+1)} = [\arctan u]_0^1$$
$$= \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$$

1,5

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{4}(6\ln 2 + \pi) = \frac{1}{4}(\ln 2^6 + \pi)$$
$$= \frac{1}{4}(\ln 64 + \pi)$$

0,5

Exercice 4. (2 pts) Calculer la primitive $\boldsymbol{F(x) = \int x^3 \arctan x \, dx}$

$\int x^3 \arctan x \, dx$ IPP

$$F(x) = u'v \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u' = x^3 \\ v = \arctan x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u = \dfrac{x^4}{4} \\ v' = \dfrac{1}{1+x^2} \end{cases}$$

$$\rightarrow F(x) = [uv] - \int u v'$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} \arctan x\right] - \int \frac{x^4}{4(1+x^2)} \, dx$$

1

$$= \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{1}{4} \int \frac{x^4}{1+x^2} \, dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^4 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^4 - x^2 & x^2 - 1 \\ \hline -x^2 & \\ + x^2 + 1 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{1+x^2} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{1}{4}\left[\int \left(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2+1}\right) dx\right]$$

$$= \quad - \frac{1}{4}\left[\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right]$$

1

$$= \frac{x^4}{4} \arctan x - \frac{x^3}{12} + \frac{x}{4} - \frac{1}{4} \arctan x$$

$$= \frac{1}{12}\left[(x^4 - 1) 3 \arctan x - x(x^2 - 3)\right]$$

Exercice 5. (~~2~~ pts) 1,5

Calculer $\boldsymbol{I} = \iint_{\boldsymbol{D(O,R)}} \frac{\boldsymbol{dxdy}}{\boldsymbol{x^2+y^2+R^2}}$, où $\boldsymbol{D(O,R)}$ est le disque de centre $\boldsymbol{O}$ et de rayon $\boldsymbol{R}$.

On passe en polaires $dxdy \to r\,d\theta\,dr$

et $x^2+y^2 = r^2$ 0,5

$$I = \iint_{\mathcal{D}} \frac{r\,d\theta\,dr}{r^2+R^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r\,dr}{r^2+R^2} = 2\pi \int_0^R \frac{r\,dr}{R^2\left(1+\frac{r^2}{R^2}\right)}$$

On pose $\frac{r}{R} = u \quad dr = R\,du$

Bornes:

$r=0 \to u=0$

$r=R \to u=1$

$$\to I = 2\pi \int_0^1 \frac{\cancel{R}u\,\cancel{R}\,du}{\cancel{R^2}(1+u^2)}$$

$$I = 2\pi \int_0^1 \frac{u\,du}{1+u^2} = 2\pi \int \frac{1}{2}\,\frac{2u}{1+u^2}\,du$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2}\left[\ln|1+u^2|\right]_0^1$$

$$= \pi \ln 2$$ 1

Exercice 6. (2 pts)
Résoudre l'équation différentielle : $y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}\cos x$, avec $y(0) = 1$.

$y'(x) + 3y(x) = e^{-3x}\cos(x) \quad (E)$

$(H) \rightarrow y' + 3y = 0 \rightarrow y_H(x) = A\exp(-3x)$ 0,5

Variation de la constante

On pose $A \rightarrow A(x)$ $\quad y(x) = A(x)\exp(-3x)$

$y'(x) = A'(x)\exp(-3x) + A(x)(-3)\exp(-3x)$

$(E) \rightarrow A'\cancel{\exp(-3x)} - 3A\exp\cancel{(-3x)} + 3A\exp\cancel{(-3x)} = \cos x \, \exp\cancel{(-3x)}$.

$\Leftrightarrow \quad A'(x) = \cos(x) \rightarrow A(x) = \sin(x) + C$

1

$\Rightarrow y(x) = [\sin(x) + C]\exp(-3x)$.

CI $\Rightarrow y(0) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad 1 = (\sin(0) + C)\exp(0)$.

$\Leftrightarrow \quad 1 = C$ 0,5

$\Rightarrow y(x) = [\sin x + 1]\exp(-3x)$.

Exercice 7. (1-~~1~~ 1,5 pts)
Résoudre les équations différentielles :
(1) : $\boldsymbol{y' - y^2 \cos x = \cos x}$, avec $\boldsymbol{y(0) = 1}$; puis (2) : $\boldsymbol{y'' - 2y' + y = x}$

$y' - y^2 \cos(x) = \cos(x)$

$\frac{y'}{\cos x} - y^2 = 1 \qquad \frac{y'}{\cos x} = 1 + y^2$

$\frac{y'}{1+y^2} = \cos x$

$\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx = \int \cos x\,dx$

$\arctan(y(x)) = \sin x + C$

$\rightarrow y(x) = \tan[\sin x + C]$.

CI $\rightarrow y(0) = 1$

$1 = \tan(0 + C) \rightarrow C = \frac{\pi}{4}$

1

$\Rightarrow y(x) = \tan\left(\sin x + \frac{\pi}{4}\right)$

2) $y'' - 2y' + y = x$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \qquad \Delta = 0 \rightarrow r = \frac{2}{2} = 1$

et $y_H = (Ax + B)\exp(x)$

Sol particulière sous la forme $y_p(x) = ax + b$

$y_p'(x) = a$

$y_p''(x) = 0$

$\rightarrow -2a + ax + b = x$

$\rightarrow a = 1$

$-2a + b = 0$

$\rightarrow b = 2$

1,5

$y(x) = (x+2) + (Ax+B)\exp(x) + C$

0,5 2

Exercice 8. (~~1-1,0~~-1,5 pts) Soit la matrice $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

1) Calculer $\det(A)$.
2) Déterminer A^{-1} par la méthode de votre choix.
3) Montrer que $A^2 = A + 2I$ et **en déduire** l'expression de A^{-1} (trouvée en 2)).

1) $\det A = 2$ 0,5

2) $A\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \iff \begin{cases} y+z = u \\ x+z = v \\ x+y = w \end{cases}$$

On arrive à : $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + \frac{1}{2}w \\ y = \frac{1}{2}(u - v + w) \\ z = \frac{1}{2}v - \frac{u}{2} - \frac{w}{2} \end{cases}$

Soit $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ 2

3) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$A + 2I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\Big\}\ \underline{A^2 = A + 2I}$

On a $A^2 = A + 2I = A + 2AA^{-1} = A[I + 2A^{-1}]$ 1,5

$\Rightarrow A = I + 2A^{-1}$

$\iff A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I) = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$