

Contrôle Continu n° 3

Les documents, comme la calculatrice, sont interdits

Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés

Répondez dans les cases. Si vous manquez de place, continuez au verso

Le 11/12/2025

NOM, Prénom :

Exercice 1 (4 pts) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $\begin{cases} y' + y = x^5 e^{-x} \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (Utiliser la méthode de la variation de la constante)

(H) $y' + y = 0 \rightarrow y_H(x) = A e^{-x}$

(E) $y' + y = x^5 e^{-x}$ variation de la C: $A \rightarrow A(x)$

$y_p = A(x) e^{-x} \quad y_p' = A'(x) e^{-x} - A(x) e^{-x}$

(E) $\Rightarrow A' e^{-x} - A e^{-x} + A e^{-x} = x^5 e^{-x} \Rightarrow A'(x) = x^5$

$A(x) = \frac{x^6}{6} + C$

$\Rightarrow y(x) = \left(\frac{x^6}{6} + C \right) e^{-x}$

C.I $\rightarrow y(0) = 1 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y(x) = \left(\frac{x^6}{6} + 1 \right) e^{-x}$ ②

b) $\begin{cases} x^2 y' = y^2 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \frac{y'}{y^2} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int \frac{1}{x} dx$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y(x)} = -\frac{1}{x} + C \quad \Leftrightarrow y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} - C}$

C.I: $y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow C = -1$

donc $y(x) = \frac{1}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{x}{1+x}$ ②

Exercice 2 (3 pts) Résoudre l'équation différentielle : $y' + 2y = 4e^x + \cos(x) + \sin(x)$.

Indication : Pour cela, chercher une solution particulière de la forme

$$y(x) = Ae^x + B\cos(x) + C\sin(x).$$

$$(H) \rightarrow y' + 2y = 0 \rightarrow y_h(x) = Ae^{-2x}$$

$$(E) \rightarrow y' + 2y = 4e^x + \cos(x) + \sin(x)$$

$$\text{On prend } y_p(x) = Ae^x + B\cos(x) + C\sin(x)$$

$$\text{Soit } y'_p(x) = Ae^x - B\sin(x) + C\cos(x)$$

$$(E) \Rightarrow 3Ae^x + (2B+C)\cos(x) + (2C-B)\sin(x) = 4e^x + \cos(x) + \sin(x)$$

$$\Rightarrow A = \frac{4}{3}$$

$$B = \frac{1}{5}$$

$$C = \frac{3}{5} \Rightarrow y_p(x) = \frac{4}{3}e^x + \frac{1}{5}(\cos(x) + 3\sin(x))$$

Solution générale :

$$y(x) = Ae^{-2x} + \frac{4}{3}e^x + \frac{1}{5}(\cos(x) + 3\sin(x)) \quad \forall A \in \mathbb{R}$$

③

Exercice 3 (5 pts) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' - 5y' + 4y = 8x + 6$ $\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 4) = 0$

Donc $y_h(x) = A e^x + B e^{4x}$

Solr particulière ? $y_p(x) = ax + b$
 $y_p'(x) = a$ $y_p'' = 0$

$\Leftrightarrow 0 - 5(a) + 4(ax + b) = 8x + 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \end{cases}$

$\rightarrow y_p(x) = 2x + 4$

la solution générale st donc

$y(x) = A e^x + B e^{4x} + 2x + 4$

(2,5)

b) $y'' - 2y' + 5y = 10 \cos(x)$

(Chercher une solution particulière)
 $y(x) = A \cos(x) + B \sin(x)$

$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\Delta = -16 < 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

Donc $y_h(x) = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x)$

On cherche la sol particulière sous la forme :

Soit $y_p'(x) = -A \sin x + B \cos x$ et $y_p''(x) = -A \cos x - B \sin x$

$\Rightarrow -A \cos x - B \sin x - 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 10 \cos x$

On identifie :

$\cos(x) \rightarrow -A - 2B + 5A = 10$

$\sin(x) \rightarrow -B + 2A + 5B = 0$

$\rightarrow A = 2 ; B = -1$

$\Rightarrow y_p(x) = 2 \cos x - \sin x$

la sol générale st donc :

$y(x) = e^x (A \cos 2x + B \sin 2x) + 2 \cos x - \sin x$

$\forall A, B \in \mathbb{R}$

(2,5)

Exercice 4 (5 pts) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Déterminer les valeurs propres de A.

$$\det(A - \lambda I_3) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ -2 & -2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)^2$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 1$ vp simple
 $\lambda_2 = 3$ double

(1,5)

b) Déterminer les vecteurs propres associés.

$\lambda_1 = 1$ $u_1 = ?$ $A u_1 = 1 u_1$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = x \\ -2x + y + 2z = y \\ -2x - 2y + 5z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ x = z \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 3x \\ -2x + y + 2z = 3y \\ -2x - 2y + 5z = 3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + y \\ y \\ y \end{cases} \Leftrightarrow u_2 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ y \end{pmatrix}$$

(3)

c) Expliciter la relation $A = P D P^{-1}$.

des vect. propres sont :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(0,5)

Exercice 5 (3 pts) Soit la matrice $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Expliciter la matrice $B = A + \frac{3}{2} I_3$, où I_3 est la matrice identité.

$$B = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -5 & 5 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

①

b) Calculer AB et BA .

$$\text{on trouve } AB = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = I_3$$

$$\text{et } BA = I_3$$

①

c) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I_3 .

$$AB = BA = I_3 \Rightarrow A \text{ est inversible}$$

$$A^{-1} = B = A + \frac{3}{2} I_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -5 & 5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

①

