Université de Montpellier - 2023/2024 **L2 EEA - HAE304X**

Devoir surveillé n° 3 du 27/11/2023 - Durée : 1h10

NOM, Prénom :

- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif.
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

Répondez **uniquement dans les cases** de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1. (4 pts)
Résoudre l'équation différentielle suivante : $\boldsymbol{y'(x) + 2y(x) = 4e^x + \sin x + \cos x}$.
On posera pour la solution particulière : $\boldsymbol{y_p(x) = ae^x + b\sin x + c\cos x}$

$y' + 2y = 4e^x + \sin x + \cos x$

(H) $\rightarrow$ $y' + 2y = 0$ $\rightarrow$ $y(x) = \lambda e^{-2x}$. (1)

(E) sol particulière $y_p(x) = a e^x + b \sin x + c \cos x$:

$\rightarrow y_p'(x) = a e^x + b \cos x - c \sin x$.

(E) $\Rightarrow a e^x + b\cos x - c \sin x + 2[a e^x + b \sin x + c \cos x]$
$= 4 e^x + \sin x + \cos x$.

On identifie : (2)

$e^x \rightarrow 3a = 4$ $\quad a = \frac{4}{3}$

$\cos x \rightarrow b + 2c = 1$
$\sin x \rightarrow -c + 2b = 1$ $\rightarrow 5b = 3$ $\quad b = \frac{3}{5}$
et $c = 2b - 1$ $\quad c = \frac{1}{5}$

(1)

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \lambda e^{-2x} + \frac{4}{3} e^x + \frac{3}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x}$

Exercice 2. (2 points) Résoudre l'équation différentielle suivante : $\sqrt{x}\, y' = \sqrt{y}$

$\sqrt{x}\, y' = \sqrt{y}$ On cherche $y(x)$.

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$$\int \frac{y'(x)}{\sqrt{y(x)}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$ 1

$$\Leftrightarrow \quad 2\sqrt{y(x)} = 2\sqrt{x} + C$$

$$4\, y(x) = (2\sqrt{x} + C)^2$$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{4}(2\sqrt{x} + C)^2}$$ 1

$$= (\sqrt{x} + C')^2$$

Exercice 3. (2+3 pts) Résoudre les équations différentielles :

(a) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(b) $y'' - 5y' + 4y = 8x + 6$

a) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

$r^2 - 6r + 9 = 0 \quad \Delta = 0 \qquad r = 3$ racine double (1)

$$\boxed{y(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{3x}}$$ (1).

b) $y'' - 5y' + 4y = 8x + 6$

(H) $y'' - 5y' + 4y = 0 \qquad r^2 - 5r + 4 = 0 \quad \Delta = 9$

Les solut sont $r_1 = 4 \quad r_2 = 1$.

$\rightarrow y_H(x) = A e^{4x} + B e^{x}$. (1).

(E) solut particulière. On la cherche sous la forme $y_p(x) = ax + b \quad \rightarrow y'_p(x) = a \quad y''_p = 0$

(E) $\rightarrow 0 - 5a + 4(ax + b) = 8x + 6$ (1,5)

Identification:

$x^1 \rightarrow 4a = 8 \quad \rightarrow a = 2$

$x^0 \rightarrow -5a + 4b = 6 \quad \rightarrow b = 4$

$$\Rightarrow \boxed{y(x) = (A e^{4x} + B e^{x}) + 2x + 4}$$ 0,5

Exercice 4. (3 points) Soit $A = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$, avec $x \in R$. Déterminer x pour que $A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix}$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^2+2 & x+3 \\ 2x+6 & 2+9 \end{bmatrix}$$ (1,5)

$$A^2 = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 11 \end{bmatrix} \Rightarrow \left| \begin{array}{lll} x^2+2 = 6 & \rightarrow & x = \pm 2 \\ 2x+6 = 2 & \rightarrow & x = -2 \\ x+3 = 1 & \rightarrow & x = -2 \\ 2+9 = 11 & & \end{array} \right.$$

(1,5)

La solut st $x = -2$

Exercice 5. (2 points) Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 70 & 0 \\ 3 & -15 & 5 \\ 2 & 20 & 3 \end{vmatrix}$

(2)

~~$\Delta = -70[-15\times 3 - 20\times 5]$~~

$\Delta = -70[3\times 3 - 5\times 2] = -70(9-10) = 70$

Exercice 6. (4 points) Soit $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & -10 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$.

(a) Déterminer $\boldsymbol{A}^{-1}$ par la méthode de votre choix.

(b) En déduire la résolution du système linéaire $\begin{cases} 3x & -10y & = 1,25 \\ -2x & +8y & = 0,5 \end{cases}$

a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ 2

b) On a le système suivant

$AX = B$ avec $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0,5 \end{bmatrix}$.

Donc $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

$X = A^{-1}B$. 1

Soit $X = \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,25 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,5 + \frac{2,5}{2} \\ 1,25 \times \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \times 0,5 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3,75 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Donc $\begin{cases} x = 3,75 \\ y = 1 \end{cases}$ 1