

Devoir surveillé n° 2 du 06/11/2023 - Durée : 1h10

NOM, Prénom :

- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif sur 21 points
- Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.

Répondez **uniquement** dans les cases de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1. (4 points : 1+3) Déterminer les primitive et intégrale suivantes :

(a)  $F(x) = \int \frac{dx}{x(1 + \ln^2|x|)}$       (b)  $G = \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$

a)  $\int \frac{dx}{x(1 + \ln^2|x|)}$        $x = \ln|x|$        $\frac{dx}{dx} = \frac{1}{x}$

$\hookrightarrow \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x = \arctan(\ln|x|)$       (1)

b)  $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$        $U = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$        $\frac{dU}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2U}$   
 $\rightarrow dx = 2U dU$       (1.5)

$\forall x \rightarrow +\infty$        $U \rightarrow +\infty$   
 $x \rightarrow 0$        $U = 0$

$\rightarrow I = \int_0^{+\infty} 2U e^{-U} dU$

IPP  $u' = e^{-u} \rightarrow u = -e^{-u}$   
 (1)  $v = 2U \rightarrow v' = 2$

$I = [-2U e^{-U}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} -2 e^{-U} dU$

$= \text{---} + 2 [-e^{-U}]_0^{+\infty}$

$= [-2 e^{-U} (1+U)]_0^{+\infty} = 2$       (0.5)



Exercice 2. (4 points) Déterminer la primitive  $H(x) = \int \frac{x^4}{x^2-4} dx$

$$\frac{x^4}{x^2-4} \quad \begin{array}{r} x^4 \\ -x^4+4x^2 \\ \hline -4x^2+16 \end{array} \left| \begin{array}{r} x^2-4 \\ x^2+4 \end{array} \right. \quad \text{1,5}$$

$$\frac{x^4}{x^2-4} = x^2+4 + \frac{16}{x^2-4} \quad \text{0,5} = x^2+4 + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

1

$$A = 4 \quad \text{0,5}$$

$$B = -4$$

$$\Rightarrow \frac{x^4}{x^2-4} = x^2+4 + \frac{4}{x-2} - \frac{4}{x+2}$$

$$\int \frac{x^4}{x^2-4} = \frac{x^3}{3} + 4x + 4 \ln|x-2| - 4 \ln|x+2| \quad \text{0,5}$$



Exercice 3. (4 points) Calculer l'intégrale  $I = \int_0^{\pi/4} \cos^4 x \, dx$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^4 x \, dx$$

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

$$\cos^4 x = \left( \frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x)$$

$$= \frac{1}{4} (1 + 2 \cos(2x) + \frac{1}{2} (1 + \cos(4x)))$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \cos(4x) \quad (3)$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{8} \cos(4x)$$

$$\rightarrow I = \left[ \frac{3}{8} x + \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{32} \sin(4x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$I = \frac{3}{8} \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} (1) + \frac{1}{32} (0) = \frac{3\pi}{32} + \frac{1}{4} \quad (1)$$

24

Exercice 4. (3 points) Calculer l'intégrale double  $J = \iint_{[1,2] \times [-4,4]} (2x + 5y^5) dx dy$

$$\iint_{[1,2] \times [-4,4]} (2x + 5y^5) dx dy$$

$$\int_{[-4,4]} \int_{[1,2]} (2x + 5y^5) dx dy = \int_{[-4,4]} \left[ \frac{2x^2}{2} + 5y^5 x \right]_1^2 dy$$

$$= \int_{-4}^4 (x^2 + 5y^5 x) \Big|_1^2 dy = \quad (1,5)$$

$$= \int_{-4}^4 (4 + 10y^5 - (1 + 5y^5)) dy = \int_{-4}^4 (3 + 5y^5) dy \quad (1)$$

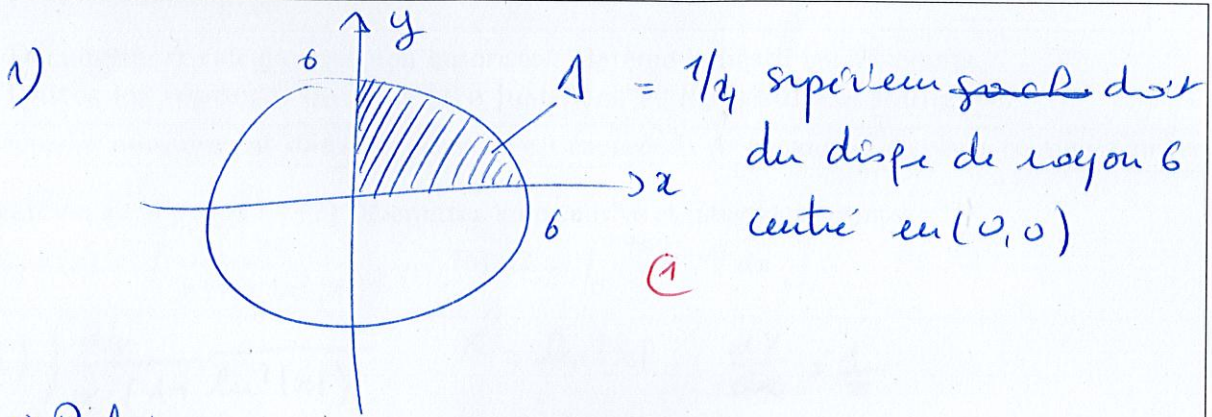
$$= \int_{-4}^4 \left[ 3y + 45 \frac{y^6}{6} \right]_{-4}^4 = 3(4+4) = 3 \times 8 = \underline{\underline{24}} \quad (0,5)$$

paire



Exercice 5. (6 points : 1+2+3) Soit  $\Delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2; x^2 + y^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0\}$ .

1. Décrire et dessiner ce domaine  $\Delta$ .
2. Calculer son aire en utilisant les coordonnées polaires.
3. Calculer son aire en utilisant un découpage par tranches.



2) Polaires -

$$A_{\Delta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^6 r \, d\theta \, dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^6 r \, dr = \left[ \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_0^6$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $\theta$   $r$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{36}{2} = \frac{36\pi}{4} = 9\pi$$

3) En tranches.

$$x^2 + y^2 \leq 36 \Leftrightarrow y^2 \leq 36 - x^2$$

$$y^2 \leq \sqrt{36 - x^2}$$

$$A_{\Delta} = \int_0^6 \int_0^{\sqrt{36-x^2}} dy \, dx = \int_0^6 \sqrt{36-x^2} \, dx = \int_0^6 \sqrt{36\left(1 - \frac{x^2}{6^2}\right)} \, dx$$

$\uparrow$   $\uparrow$   
 $x$   $y$

On pose  $u = \frac{x}{6}$   $du = \frac{1}{6} dx$

$$qd \, x = 6 \rightarrow u = 1$$

$$x = 0 \quad u = 0$$

$$\rightarrow A_{\Delta} = \int_0^1 6\sqrt{1-u^2} \, du \quad \sin t = u \quad \frac{dt}{du} \frac{du}{dt} = \cos t$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36\sqrt{1-\sin^2 t} \cos t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36\sqrt{\cos^2 t} \, dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 36 \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = 18 \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 18 \frac{\pi}{2} = 9\pi$$