Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°1 - 9 octobre 2023 – durée 1h

Exercice 1 (2-2-2-2 points)
Déterminez en justifiant les limites suivantes avec la technique de votre choix :

1) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{(\sin(x))^2}$ $\to \frac{3}{2}$ (DL)

2) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{6+x}-3}{x-3}$ $\to \frac{1}{6}$ (dérivée)

3) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{3}}-1}{x}$ $\to \frac{1}{3}$ (dérivée)

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{9x^2+6x+1}-3x$ $\to 1$ (conjugué)

Exercice 2 (1 – 1 points)
Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \tan\left(e^{x^2+1}\right)$ $\Rightarrow \left(2x\, e^{(x^2+1)}\right)\left(1+\tan^2\left(e^{(x^2+1)}\right)\right) = f'(x)$.
2) $g(x) = 3^{2^x}$ $\Rightarrow \ln 2 . \ln 3 . 2^x . 3^{2^x}$

Exercice 3 (2,5 – 1,5 points)

Déterminez le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = \left(1+\frac{x}{2}\right)^{1/2}$

1. En utilisant la formule de Taylor $\to f(0) = 1 \quad f'(0) = \frac{1}{4} \quad f''(0) = -\frac{1}{16}$
2. En utilisant un DL usuel

$\hookrightarrow DL = 1 + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{16}\right)x^2 + o(x^2)$

avec $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$

ici $x = \frac{x}{2} \quad \alpha = \frac{1}{2}$

Exercice 4 (3 points)
Établir avec la méthode de votre choix le développement limité en 0 à l'ordre 4 de $f(x) = 1/cos(x)$.

$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$.

$\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1\underbrace{\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right)}_{u(x)}} = \frac{1}{1+u(x)}$ et $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$

$\frac{1}{\cos x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2$

$= 1 + \frac{x^2}{2} + x^4\frac{5}{24} + o(x^5)$

Exercice 5 (2– 2 points)
Déterminez en justifiant les développements limités suivants :

1) $DL_2(0)$ de $f(x) = \frac{1}{2+e^x}$
2) $DL_2(2)$ de $f(x) = \ln(3+x)$

$\to \frac{1}{2+e^x} = \frac{1}{2+\left(1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots\right)}$

$= \frac{1}{3+\underbrace{\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\dots\right)}_{u}} = \frac{1}{3+u(x)} = \frac{1}{3\left(1+\frac{u}{3}\right)}$

$= \frac{1}{3}\left(1-\frac{u}{3}+\frac{u^2}{9}\right)$

$= \frac{1}{3} - \frac{1}{9}x - \frac{x^2}{\cancel{8}54} + o(x^2)$

$\ln(3+x) = \ln(3+x+2-2) = \ln(5+x-2) = \ln\left(5\left(1+\frac{x-2}{5}\right)\right)$
$= \ln 5 + \ln\left(1+\frac{x-2}{5}\right)$

$\frac{x-2}{5} \underset{x\to 2}{\to} 0$

$\to \ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}$

$\hookrightarrow \ln(3+x) = \ln 5 + \left(\frac{x-2}{5}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x-2}{5}\right)^2 + o\left((x-2)^2\right)$