



Session : 1

Date : 14 / 01 / 2022

Licence  Master

Mention : L2

Parcours : Portail Curie

Libellé + Code de l'UE : HAE304X Outils Mathématiques pour l'EEA

Durée de l'épreuve : 2 heures

Documents autorisés : **Aucun**

Matériels autorisés : aucun

### Exercice 1 (4 points)

Déterminer les limites suivantes avec la méthode de votre choix :

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1} \quad 2. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3}}{4x+5} \quad 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

### Exercice 2 (2 points)

Déterminer la dérivée de

1)  $f(x) = \exp(\sqrt{x^2+1})$

2)  $f(x) = \arctan x$

### Exercice 3 (2 points)

Déterminer le DL à l'ordre 3 en 0 de  $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$

### Exercice 4 (3 points)

Déterminer la primitive suivante :

$$\int \frac{x^2}{2^6+x^6} dx$$

Indication : on posera  $u = x^3$

### Exercice 5 (3 points)

On définit l'intégrale  $I = \iint_D xy \, dx dy$ , sur le domaine  $D = \{x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 2\}$

1. Représenter le domaine D sur un graphe. Quelle est son aire ?
2. Calculer I

### Exercice 6 (2 points)

Soit la matrice suivante :  $M = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

1) Calculer  $M^2 = M \times M$

2) Déterminer  $x$  pour que  $M^2 = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 10 & 18 \end{bmatrix}$

### Exercice 7 (1 points)

Soit la matrice suivante :  $M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$

Déterminer  $M^{-1}$  l'inverse de la matrice  $M$  par la méthode de votre choix.

### Exercice 8 (3 points)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1)  $y' - 2y = 4$  avec  $y(0) = 0$

2)  $y'' - 3y' + y = x$

### Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand  $x$  tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\cosh x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sinh x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (a \text{ réel donné})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$