

Contrôle Terminal

Les documents, comme la calculatrice, sont interdits

Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés

Répondez dans les cases. Si vous manquez de place, continuez au verso

Le 07/01/2026

Numéro d'anonymat :

Exercice 1 (3 pts) En utilisant les développements limités :

a) Calculer la limite en $x = 0$ de la fonction $h(x) = \frac{\ln(1-x) + \sin(x)}{x^2}$.

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{1}{x^2} \left[\left(-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3!} \dots \right) + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \right) \right] \quad \text{au } O(0) \\ &= \frac{1}{x^2} \left[-\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3!} + x^4 \varepsilon(x) \right] = -\frac{1}{2} - \frac{2}{3!}x + x^2 \varepsilon(x) \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -\frac{1}{2}$$

①

Rappels : Quelques $DL_n(0)$

$$\begin{array}{l}
 \sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3 \varepsilon(x) \\
 e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n \varepsilon(x) \\
 \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + x^n \varepsilon(x) \\
 \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p} \varepsilon(x) \\
 \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^p \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1} \varepsilon(x)
 \end{array}$$

b) Calculer $DL_1(0)$, le développement limité à l'ordre 1 en $x = 0$, de $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$.

$$\begin{aligned}
 (x+1)^{\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{au } O(0) \\
 e^{\sqrt{x+1}} &= \exp\left[\frac{\quad}{\quad}\right] \quad \Delta \neq 0 \quad x \rightarrow 0 \\
 &= \exp(1) \exp\left[\frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x)}{1}\right] \quad u(x) \rightarrow 0 \quad \text{de} \\
 &= e \cdot \exp(u(x)) \\
 &= e \left[1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \right] \\
 &= e \left[1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x) \right] \quad \text{à l'ordre 1.} \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

c) Déterminer une primitive de $f(x) = -3 \sin(x) \cos^2(x)$, et en déduire son $DL_2(0)$.

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -3 \sin(x) \cos^2(x) \\
 \text{Une primitive de } f(x) &= \cos^3(x) + C \\
 \text{Au } O(0), \text{ DL de } F(x) &= ? \\
 \text{On a } \cos(x) &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad (A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3 \\
 \cos^3(x) &= 1 + 3\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 3 \cdot 1 \cdot \left(\frac{x^4}{4!}\right) + \frac{x^6}{2^3} + x^6\varepsilon(x) \\
 &= 1 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4!}x^4 + x^6\varepsilon(x) \\
 \text{Donc le DL de } f(x) &= \text{dérivée de celui de } \cos^3 x \\
 f(x) &= -3x + x^3\varepsilon(x) \quad \text{à l'ordre 2} \quad \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

Exercice 2 (5 pts) Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 \arctan(x) dx$ (par intégration par parties)

$$u' = 1 \quad v = \arctan x$$

$$u = x \quad v' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan(x) dx &= [x \arctan x]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} [\ln|1+x^2|]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} (\ln 2 - 0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2 \end{aligned}$$

1,5

b) $\int_2^3 \frac{dx}{x (\ln(x))^3} = I$ (par le changement de variable $y = \ln(x)$)

Soit $y = \ln(x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \rightarrow dx = x dy$$

bornes? $\begin{cases} x=2 \rightarrow y = \ln 2 \\ x=3 \rightarrow y = \ln 3 \end{cases}$

$$I = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x dy}{x y^3} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} y^{-3} dy = \left[-\frac{1}{2} y^{-2} \right]_{\ln 2}^{\ln 3} = -\frac{1}{2} \left[\frac{1}{(\ln 3)^2} - \frac{1}{(\ln 2)^2} \right]$$

(= 0,62)

1,5

c) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$

$x^2 - x - 6 \rightarrow$ 2 solutions évidentes

$$\begin{array}{r|l} x^2 - x - 6 & x+2 \\ -x^2 - 2x & \\ \hline -3x - 6 & \\ -3x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x^2 - x - 6} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3}$$

* Calcul de A? on $\times (x+2)$ et on fait $x = -2$

$$\frac{1}{x-3} = A + B \frac{x+2}{x-3} \Rightarrow A = \frac{1}{-5}$$

* B? on $\times$ par $(x-3)$ et on fait $x = 3$

$$\frac{1}{x+2} = A \frac{(x-3)}{x+2} + B \Rightarrow B = \frac{1}{5}$$

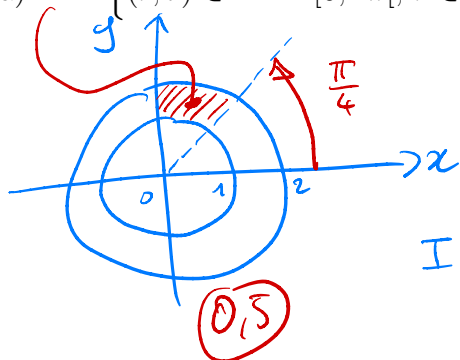
2

$$\Leftrightarrow I = \int \left(-\frac{1}{5} \frac{1}{x+2} + \frac{1}{5} \frac{1}{x-3} \right) dx$$

$$I = \frac{1}{5} \left[\ln|x-3| - \ln|x+2| \right] + C$$

Exercice 3 (4 pts) Représenter les domaines Δ suivants, et calculer les différentes intégrales $\int \int_{\Delta} f(x, y) dx dy$:

a) $\Delta = \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[, r \in [1, 2], \theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \right\}$ et $f(x, y) = 1$.



$$I = \iint_{\Delta} f(x, y) dx dy$$

$$I = \iint_{\Delta} r d\theta dr \quad \text{en polaires}$$

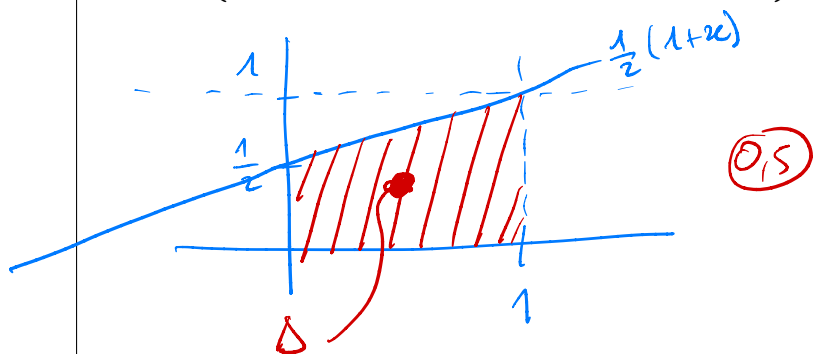
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_1^2 r dr$$

$$= \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_1^2$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3\pi}{8}$$

(1.5)

b) $\Delta = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 1], 0 \leq y \leq \frac{1}{2}(1+x) \right\}$ et $f(x, y) = x$.



$$I = \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{2}(1+x)} x dy dx = \int_0^1 x [y]_0^{\frac{1}{2}(1+x)} dx$$

$$= \int_0^1 x \left(\frac{1}{2}(1+x) \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(x+x^2) dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right]$$

$$= \frac{5}{12}$$

(1.5)

Exercice 4 (5 pts) Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(y(x))}$ avec $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

$$y'(x) \cos(y(x)) = \sin x$$

$$\int y'(x) \cos(y(x)) dx = \int \sin x dx$$

(1,5)

$$\sin(y(x)) = -\cos(x) + C$$

$$\rightarrow y(x) = \arcsin[-\cos x + C]$$

$$y(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} = \arcsin[-\cos(\frac{\pi}{2}) + C] = \arcsin(C)$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{2} = C = 1$$

$$\rightarrow y(x) = \arcsin[-\cos x + 1]$$

b) $(1+2x)y'(x) + y(x) = 0$ avec $y(0) = 2$.

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{1+2x} \rightarrow \int \frac{y'}{y} dx = -\int \frac{dx}{1+2x}$$

$$\ln(y(x)) = -\frac{1}{2} \ln(1+2x) + C$$

(1,5)

$$y(x) = \exp\left[C + \ln\left(\frac{1}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \exp(C) \cdot \exp\left[\ln\left(\frac{1}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \lambda \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{2}{\sqrt{1+2x}}$$

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = \lambda \frac{1}{\sqrt{1}} \Rightarrow \lambda = 2$$

c) $y''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = x^2$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \rightarrow \Delta = 1 \quad \lambda_{\pm} = \frac{3 \pm 1}{2} \quad \lambda_{+} = 2, \lambda_{-} = 1$$

$$y_h(x) = A \exp(2x) + B \exp(x)$$

Sol. particulière sous la forme $y(x) = ax^2 + bx + c$

On trouve $a = \frac{1}{2}$

$$b = \frac{3}{2}$$

$$c = \frac{7}{4}$$

$$\rightarrow y_p = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

(2)

La sol. générale est sous la forme :

$$y = A \exp(2x) + B \exp(x) + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{7}{4}$$

Conditions initiales

$$\begin{aligned} y(0) &= 0 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} A + B + \frac{7}{4} = 0 \\ 2A + B + \frac{3}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{4} \\ B = -2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{4} e^{2x} - 2 e^x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{7}{4}$$

Exercice 5 (3 pts) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Diagonaliser la matrice A , en donnant les matrices P et D telles que $A = PDP^{-1}$.

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = (1-\lambda)(-1-\lambda) \rightarrow \text{Valeurs propres} = -1, 1$$

$\lambda_1 = -1$ $Au_1 = \lambda_1 u_1$ $u_1 = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = x \\ -2x - y = -y \end{cases} \Rightarrow y = 0 \rightarrow u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) En utilisant la relation $A = PDP^{-1}$, montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$.

$$\lambda_2 = +1 \quad Au_2 = \lambda_2 u_2 \rightarrow u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ On calcule } P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $A = PDP^{-1}$

$$A^2 = AA = PDP^{-1}PDP^{-1} = PDIP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

$$A^3 = AAA = PD^3P^{-1} \text{ et de m\^eme, on aura } A^n = PD^nP^{-1}$$

c) En utilisant la réponse de la question précédente, montrer que $A^4 = I_2$.

$$A^4 = PD^4P^{-1}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad D^4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\text{d'o\^u } A^4 = PD^4P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2$$

