Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°3 - 21 novembre 2024 – durée 1h10

Exercice 1 (2 – 3 - 2 points)
Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1) Déterminer ses valeurs propres
2) Déterminer les vecteurs propres associés
3) Dans la formule $A = PDP^{-1}$, donner les matrices D et P. Déterminer P^{-1}

Exercice 2 (1– 1 – 1 points)
Soit la matrice A suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

1) A quelle condition A est elle inversible ?
2) Déterminez A^{-1} par la méthode de votre choix.
3) Soit a = 1. En déduire la résolution **matricielle** du système suivant : $\begin{cases} 3x + 1y = 2 \\ -2 + 4y = 1 \end{cases}$

Exercice 3 (4 points)
Résoudre l'équation différentielle suivante, pour x > 0

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^3}$$

On considèrera la condition initiale suivante : y(1) = 1

Exercice 4 (3,5 points)
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x + 3$$

Exercice 5 (2,5 points)
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 6y = 2\cos(x)$$

Indication : on cherchera une solution particulière sous la forme $y_p = Acos(x) + Bsin(x)$

CC3 - 2024

Exo 1

1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det A - \lambda I = 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda^{+} & 0 & 1 \\ 0 & ^{-}1-\lambda & 0 \\ 1^{+} & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right] + 1\left(-(1-\lambda)\right).$

$= (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right].$

$= (1-\lambda)\left[\cancel{1} - 2\lambda + \lambda^2 - \cancel{1}\right] = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda)$

$= \lambda(1-\lambda)(\lambda - 2).$

$\Rightarrow$ Vp : 0, 1, 2. $\rightarrow$ 2pts

2) Vect Propres ?

On a $Au = \lambda u.$

$\underline{\underline{\lambda = 0}}$ $Au_0 = \lambda u_0 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$

$\left| \begin{array}{l} x + z = 0 \\ y = 0 \\ x + z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left| \begin{array}{l} x = -z \\ y = 0 \\ z \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_0$

$\underline{\underline{\lambda = 1}}$ $Au_1 = \lambda u_1$

$\Rightarrow$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x + z = x \rightarrow z = 0 \\ y = y \\ x + z = z \rightarrow x = 0 \end{array} \right. \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = u_1$

$\underline{\lambda = 2}$ $\quad A u_2 = \lambda u_2$ ②

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

$$\begin{cases} x + z = 2x \\ y = 2y \\ x + z = 2z \end{cases} \quad \begin{matrix} z = x \\ \to y = 0 \\ x = z \end{matrix} \quad \to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = u_3$$

3 pts

$A = PDP^{-1}$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ et } P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

0,5 0,5

$u = v \to u = P^{-1} v$.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z = a \\ \boxed{y = b} \\ x + z = c \end{cases}$$

$x = z - a \ (1)$

$2z = a + c \to \boxed{z = \frac{1}{2}(a+c)}$

$(1) \to x = \frac{1}{2}(a+c) - a = \boxed{-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c = x}$

$$\Leftrightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{(1 pt)}$$

$\underline{\text{Ex } 2}$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & a \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

(1)

A inversible si $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det A = 12 + 2a = |A|$

$\Rightarrow 12 + 2a \neq 0 \Rightarrow \underline{a \neq -6}$ (1)

A^{-1} avec la formule $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} 4 & -a \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 4 & -a \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (1)

3) On a $a = 1$

$\rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$.

$\rightarrow A^{-1} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.   ici $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow x = A^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

oit

$$x = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{matrix}}$$ 1

o3

$' + \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3}$

$) = \quad y' + \frac{2}{x} y = 0 \rightarrow y = \lambda \exp\left[- \int \frac{2}{x} dx \right]$

$= \lambda \exp\left[-2 \ln x \right] = \lambda \left(\exp\left[+ \ln x \right] \right)^{-2}$

$= \lambda x^{-2} = \frac{\lambda}{x^2}$ 1

ariat de lec

$\rightarrow \lambda(x) \qquad y(x) = \lambda(x) \frac{1}{x^2} = \lambda(x) x^{-2}$

$y'(x) = \lambda'(x) x^{-2} + \lambda(x)(-2) x^{-3}$

$\rightarrow ED \Rightarrow \lambda'(x) x^{-2} + \cancel{\lambda(x)(-2) x^{-3}} + \cancel{2x^{-1} \lambda(x) x^{-2}} = x^{-3}$

$\lambda'(x) x^{-2} = x^{-3} \rightarrow \lambda'(x) = \frac{1}{x}$

$\lambda(x) = \ln(x) + C$

$\Rightarrow$ sol générale $\boxed{y(x) = \left[\ln(x) + C \right] \frac{1}{x^2}}$ 2

C.I : $y(1) = 1 \Rightarrow 1 = \left[\ln(1) + C \right] \frac{1}{1} \Rightarrow C = 1$.

$\Rightarrow \boxed{y(x) = \left[\ln(x) + 1 \right] \frac{1}{x^2}}$ 1

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER

Exo4 (4)

$y'' - 5y' + 6y = 6x^2 - 4x + 3$

Eq. car. $r^2 - 5r + 6 = 0$ $\Delta = 1$.

Les sol. sont $r_1 = 2$ $r_2 = 3$ (1)

$\to y_H = A e^{2x} + B e^{3x}$.

Sol. particulière sous la forme : $y_p = ax^2 + bx + c$.
$y_p' = 2ax + b$ (1)
$y_p'' = 2a$

$\to 2a - 5[2ax + b] + 6[ax^2 + bx + c] = 6x^2 - 4x + 3$

x^0 : $2a - 5b + 6c = 3$

x^1 : $-10a + 6b = -4$ $\to 6b = -4 + 10a = -4 + 10 = 6$ $b = 1$

x^2 : $6a = 6$ $\to a = 1$

$6c = 3 - 2a + 5b$

$6c = 3 - 2 + 5 \to c = 1$

$\to$ sol. générale :

$$\boxed{y(x) = A e^{2x} + B e^{3x} + x^2 + x + 1}$$ (1,5)

Exo5

On a $y_H = A e^{2x} + B e^{3x}$. (0 ou 0,5)

Sol. particulière sous la forme $y_p = A\cos x + B\sin x$.
$y_p' = -A\sin x + B\cos x$
$y_p'' = -A\cos x - B\sin x$

$(E) \to -A\cos x - B\sin x - 5(-A\sin + B\cos) + 6(A\cos + B\sin) = 2\cos x$

cos : $[-A - 5B + 6A] = 2$ $\Leftrightarrow$ $5A - 5B = 2$ $\to 10A = 2$ $\to A = \frac{1}{5}$

sin : $[-B + 5A + 6B] = 0$. $5A + 5B = 0$ $\to A = -B$ $B = -\frac{1}{5}$.

$$\boxed{y(x) = A e^{2x} + B e^{3x} + \frac{1}{5}\cos x - \frac{1}{5}\sin x}$$ (2) (2,5)