Université de Montpellier 2024 - 2025 L2 EEA - HAE304X

Devoir surveillé n° 2 du 04/11/2024 - Durée : 1h10

NOM, Prénom :

- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

Répondez **uniquement dans les cases** de lénoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1 (~~4~~ 3 points) Calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} \sin^3 x \, dx$

Formule d'Euler en trigo!

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1\ 1 \\ 1\ 2\ 1 \\ 1\ 3\ 3\ 1 \end{array}$$

$$\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3$$

$$= \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left(e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right)$$

$$= \frac{-1}{8i}\left(2i(\sin(3x)) - 3\,2i(\sin x)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin x\right).$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{\pi} -\frac{1}{4}\left(\sin(3x) - 3\sin x\right) dx$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \left[3\sin x - \sin(3x)\right] dx$$

3

$$= \frac{1}{4}\left\{\left[3\cos x - \frac{\cos(3x)}{-3}\right]_0^{\pi}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\left\{3\left[-(-1-1) + \left(\frac{1}{3}(-1-1)\right)\right]\right.$$

$$= \frac{1}{4}\left\{6 - \frac{2}{3}\right\} = \frac{1}{4}\left(\frac{18-2}{3}\right) = \frac{1}{\cancel{4}}\,\frac{\overset{4\times 4}{16}}{3} = \frac{4}{3}$$

Exercice 2 (~~3~~ 4 **points**) Déterminer la primitive $F(x) = \int \frac{4x^2}{4x^2-1}\,dx$

$$F(x) = \int \frac{4x^2}{4x^2-1}\,dx \qquad \text{soit } X = 2x$$
$$dX = 2dx$$

$$\to F(x) = \int \frac{X^2}{X^2-1}\cdot\frac{1}{2}\,dX = \frac{1}{2}\int \frac{X^2}{X^2-1}\,dX$$

Division euclidienne :

$$\begin{array}{r|l} X^2 & X^2-1 \\ \underline{-X^2+1} & 1 \\ 1 & \end{array} \quad \to \frac{X^2}{X^2-1} = 1 + \frac{1}{X^2-1}$$
$$= 1 + \frac{1}{(X+1)(X-1)} \quad (1)$$

$$\frac{1}{(X+1)(X-1)} = \frac{A}{X+1} + \frac{B}{X-1}$$
$$= \frac{A(X-1)+B(X+1)}{(X+1)(X-1)} = \frac{X(A+B)+1(B-A)}{(X+1)(X-1)}. \quad (1)$$

identification :

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0 \to B=-A \\ B-A=1 \to -2A=1 \end{array}\right) \to A = -\frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\frac{X^2}{X^2-1} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{X-1}$$

$$F(x) = \int\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{1}{X+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{X-1}\right)dX \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\left\{X - \frac{1}{2}\ln|X+1| + \frac{1}{2}\ln|X-1|\right\} + C \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F(x) = \cancel{2}x - \frac{1}{4}\ln|2x+1| + \frac{1}{4}\ln|2x-1| + c}$$

Ex 3 (2-2 points) Déterminer les primitives $G(x) = \int \frac{x^5}{1+x^3}\,dx$ et $H(x) = \int \ln\left(1+x^2\right)\,dx$

$$*\ G(x) = \int \frac{x^5}{1+x^3}\,dx$$

Division euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^5 & x^3+1 \\ \cline{2-2} -x^5 - x^2 & x^2 \\ \hline -x^2 & \end{array} \quad \rightarrow \frac{x^5}{x^3+1} = x^2 - \frac{x^2}{x^3+1}$$

$$G(x) = \int\left(x^2 - \frac{x^2}{x^3+1}\right)dx \qquad 2$$

$$= \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}\ln|x^3+1| + C$$

$$*\ H(x) = \int \ln(1+x^2)\,dx$$

ipp $u' = 1 \longrightarrow u = x$

$v = \ln(1+x^2) \longrightarrow v' = \frac{2x}{1+x^2}$

$$\Leftrightarrow H(x) = x\ln(1+x^2) - \int \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx$$

$\frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow$ div. euclidienne

$$\begin{array}{r|l} x^2 & x^2+1 \\ \cline{2-2} -x^2-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array} \qquad \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2} \quad 1$$

$$H(x) = x\ln(1+x^2) - 2\int\left[1 - \frac{1}{1+x^2}\right]dx$$

$$= x\ln(1+x^2) - 2\left[x - \arctan x\right] \qquad 1$$

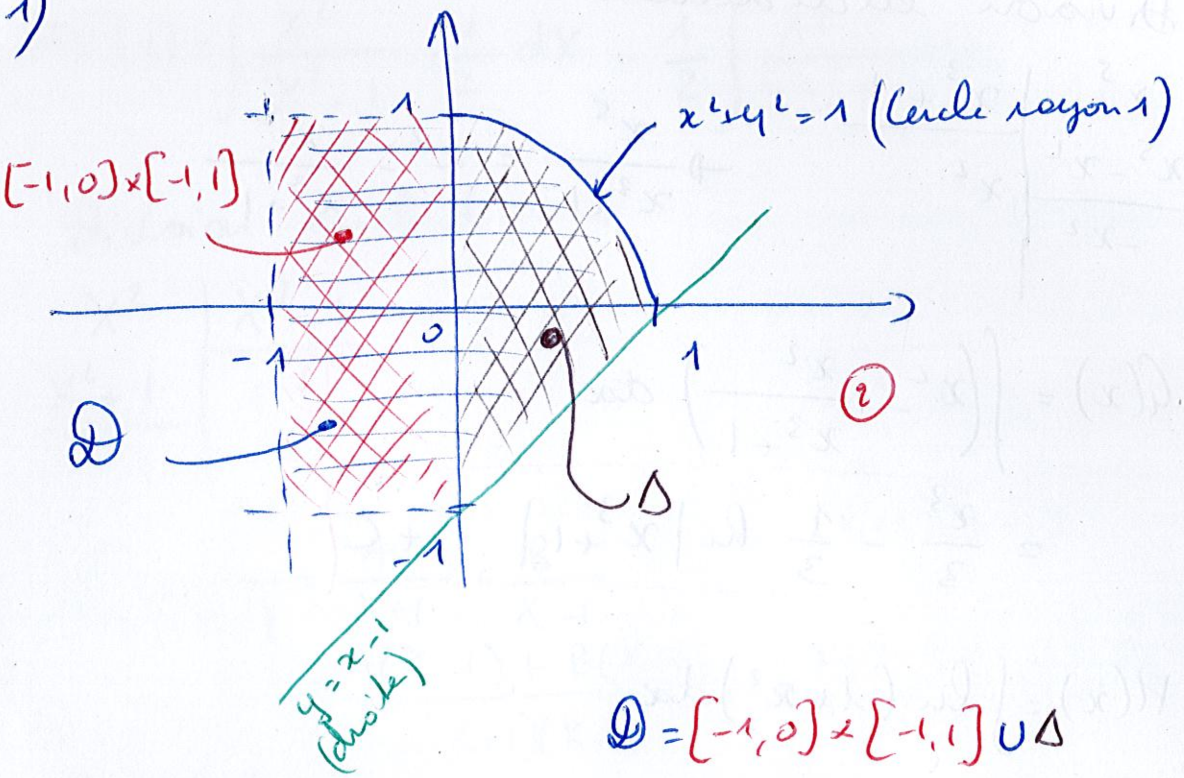
$$= x\ln|1+x^2| - 2x + 2\arctan x + C$$

Exercice 4 (2-1 points) Soit le domaine $\boldsymbol{D} = [-1, 0] \times [-1, 1] \ \cup \ \boldsymbol{\Delta}$, avec

$$\boldsymbol{\Delta} = \left\{ (x, y) \in \boldsymbol{R}^2 ; \ \ 0 \leq x \leq 1, \ \text{et} : \ \left\{ \begin{array}{ll} x^2 + y^2 \leq 1 & \text{si } \ y > 0 \\ y \geq x - 1 & \text{si } \ y \leq 0 \end{array} \right. \right\}.$$

1. Dessiner le domaine $\boldsymbol{D}$. 2. Déterminer son aire par un calcul géométrique direct.

1)



②

$\mathcal{D} = [-1,0] \times [-1,1] \cup \Delta$

2) $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} =$ ▯ + ◗ + ◸ $= (1+1) + \frac{1}{4}\pi 1^2 + \frac{1}{2}$

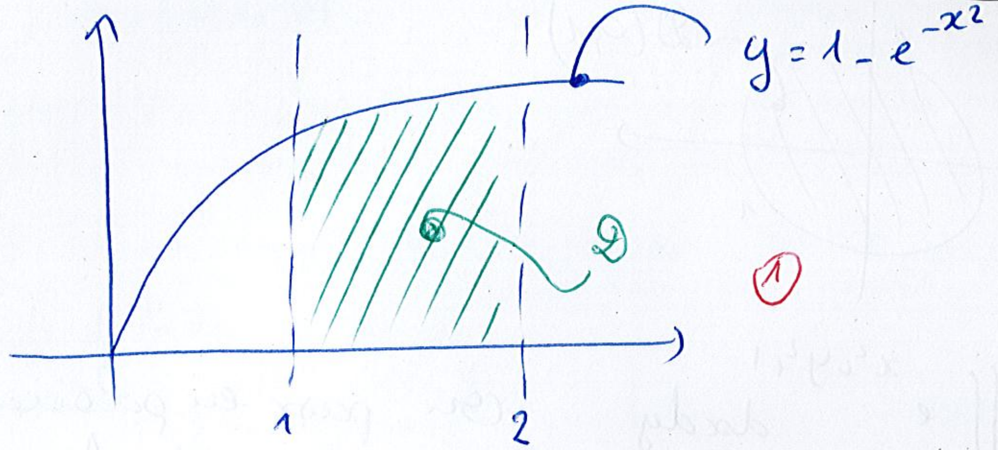
$$= \boxed{\frac{5}{2} + \frac{\pi}{4}}$$

①

Exercice 5 (1-2 points) Soit le domaine $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ \ x \in [1,2]\,,\ 0 \leq y \leq 1 - e^{-x^2}\right\}$.

1. Dessiner approximativement le domaine D. 2. Calculer $I = \iint_D x\, dx dy$

1)



1

2) $I = \iint_{\mathcal{D}} x\, dx\, dy$

$$= \int_1^2 \int_0^{1-e^{-x^2}} x\, dy\, dx = \int_1^2 x \int_0^{1-e^{-x^2}} dy\, dx$$

$\uparrow x \quad \uparrow y$

$$= \int_1^2 x \left[y\right]_0^{1-e^{-x^2}} dx =$$

$$= \int_1^2 x \left[1 - e^{-x^2}\right] dx$$

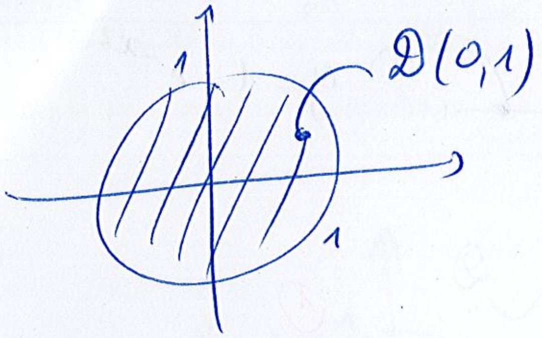
$$= \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}\right]_1^2$$

2

$$= \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(e^{-4} - e^{-1}\right)$$

$$\boxed{= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e^4} - \frac{1}{e}\right)}$$

Exercice 6 (3 points) Calculer $I = \iint_{D(O,1)} e^{x^2+y^2+1}\, dxdy$. ($D(O,1)$ est le disque unité.)



$$I = \iint_{\mathcal{D}} e^{x^2+y^2+1}\, dxdy$$

On passe en polaires compte tenu de la symétrie du domaine d'intégration.

$$I = \iint_{\mathcal{D}} e^{r^2+1}\, r\,dr\,d\theta$$

1

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 e^{(r^2+1)}\, r\, dr = \left[\theta\right]_0^{2\pi} \left[\frac{e^{r^2+1}}{2}\right]_0^1$$

$$= 2\pi\, \frac{1}{2}\left(e^2 - e^1\right) = \boxed{\pi\left(e^2 - e\right)}$$

2