Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°2 - 7 novembre 2022 – durée 1h

Exercice 1 (1-2-3 points)
Déterminez les primitives suivantes :

1) $\int \frac{1}{x}(3+\ln(x))^3 dx$

2) $\int \frac{1}{1+ax^2} dx$ avec a > 0

3) $\int \frac{x^3}{x^2-x-2} dx$

Exercice 2 (3 points)
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$$

Exercice 3 (1-1-1 points)
On cherche à calculer l'intégrale I suivante :

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(e^x+1)(x^2+1)} dx$$

1) Réalisez le changement de variable t = -x et en déduire que l'on peut aussi écrire
$$I = \int_{-1}^{1} \frac{1}{(e^{-x}+1)(x^2+1)} dx$$
2) Montrez que la somme des deux expressions donne :
$$2I = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(x^2+1)}$$
3) En déduire I

Exercice 4 (1 – 2 – 1 - 2 points)

1) Représenter le domaine :
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1 \le x \le 2 \; et \; 0 \le y \le x\}$$
2) Calculer son aire avec un calcul intégral
3) Montrez que l'on peut retrouver ce résultat géométriquement très facilement.
4) Intégrer la fonction $f(x,y) = y + x$ sur le domaine D.

Exercice 5 (1 - 1 points)

Soit le domaine :
$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2 \le 25 \, , x \ge 0, y \ge 0\}$$
Représenter Δ et déterminer son aire en utilisant les coordonnées polaires.

CC 2 $\boxed{1}$

Exo1 $\to \boxed{6}$

1) $\int \frac{1}{x}(3+\ln(x))^3 dx = \left[\frac{1}{4}(3+\ln x)^4\right] + C$ 1

2) $\int \frac{1}{1+ax^2}dx = \int \frac{1}{1+(\sqrt{a}x)^2}dx$ $\quad X = \sqrt{a}\,x$, $dX = \sqrt{a}\,dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{1}{1+X^2}dX = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan X + C = \frac{1}{\sqrt{a}}\arctan(\sqrt{a}x) + C$ 2

3) $\int \frac{x^3}{x^2-x-2}dx$

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2-x-2 \\ -x^3+x^2+2x & \overline{x+1} \\ \hline x^2+2x & \\ -x^2+x+2 & \\ \hline 3x+2 & \end{array}$$

$\to \frac{x^3}{x^2-x-2} = x+1+\frac{3x+2}{x^2-x-2}$

$(x^2-x-2) = (x+1)(x-2) \to \frac{3x+2}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \to \left| \begin{array}{l} A = \frac{1}{3} \\ B = \frac{8}{3} \end{array}\right.$

$\int = \int \left(x+1+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{8}{3}\cdot\frac{1}{x-2}\right)dx$ 3

$= \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{8}{3}\ln|x-2| + C$

exo2 $\to \boxed{3}$

$\int_0^{+\infty} \underbrace{x^2}_{v}\underbrace{e^{-x}}_{u'}dx$ IPP: $\quad I = \left[x^2 \frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{-1}(2x)\,dx$

$= 0 + \int_0^{+\infty} \underbrace{2x}_{v}\underbrace{e^{-x}}_{u'}dx \to$ 2° IPP 1,5

$\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ $\quad = \left[\frac{e^{-x}}{-1}2x\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\frac{e^{-x}}{-1}\cdot 2\,dx$ 1,5

$= 0 + 2\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{+\infty} = 2(0-(-1)) = \boxed{2}$

exo3 $\to \boxed{3}$

$t = -x \to dt = -dx$

1) $I = \int_1^{-1} \frac{-dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)} = \int_{-1}^{1}\frac{dt}{(e^{-t}+1)(t^2+1)}$ 1

2) $2I = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)} + \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)} = \int_{-1}^{1}dx\left(\frac{1}{e^x(1+e^{-x})(x^2+1)} + \frac{1}{(e^{-x}+1)(x^2+1)}\right)$

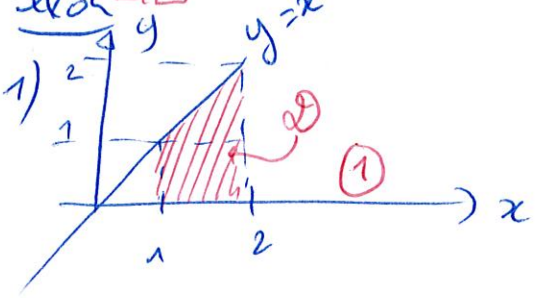
$= \int_{-1}^{1}\frac{dx}{(e^{-x}+1)(x^2+1)}\left(\frac{1}{e^x}+1\right) = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+1}$ 1

3) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^2} = \left[\arctan x\right]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$ (1) $\Rightarrow \boxed{I = \frac{\pi}{4}}$

(2)

exo4 → [6]

1)



(1)

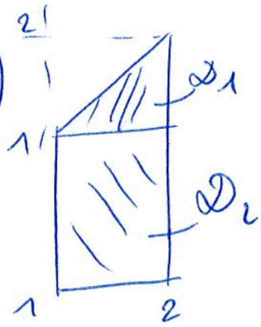
2) $\displaystyle A_{\mathcal{D}} = \int_1^2 \left[\int_0^x dy\,dx\right] = \int_1^2 [y]_0^x\,dx$

$\uparrow x \quad \uparrow y$

$\displaystyle = \int_1^2 (x-0)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{4}{2} - \frac{1}{2}$

$\boxed{A_{\mathcal{D}} = \frac{3}{2}}$ (2)

3)



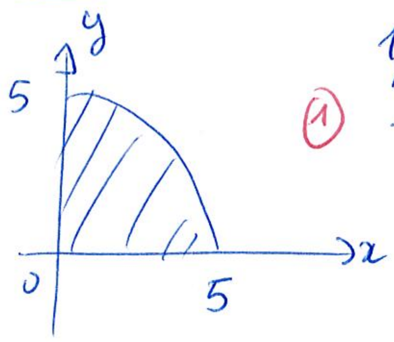
$\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 + \mathcal{D}_2$

$\mathcal{D} = \frac{1}{2}(1^2) + 1^2 = \frac{1}{2} + 1 = \boxed{\frac{3}{2}}$ (1)

4) $\displaystyle I = \int_1^2\int_0^x (x+y)\,dy\,dx = \int_1^2 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)dx = \int_1^2 \frac{3x^2}{2}dx$

$\displaystyle = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(8 - 1) = \boxed{\frac{7}{2}}$ (2)

Exo5 → [2]



(1)

1/4 de cercle de rayon 5.

→ D = 1/4 de disque, 1° cadran

$\displaystyle A = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^5 r\,d\theta\,dr = [\theta]_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^5$

$= \frac{\pi}{2}\frac{1}{2}5^2 = \boxed{\frac{25\pi}{4}}$ (1)