Devoir surveillé n° 1 du 07/10/2024 - Durée : 1h10

NOM, Prénom :

- Documents et calculatrices non autorisés. Barème indicatif
- **Toutes les réponses doivent être justifiées et les résultats soulignés.**

Répondez **uniquement dans les cases** de cet énoncé. Si vous manquez de place, continuez au verso.

Exercice 1 (1-2-2 points) Calculer :

(1) $l_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+2x+3}{5x^3+x^2-7}$ (2) $l_2 = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+6x+1}-3x$ (3) $l_3 = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x}$

1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4+2x+3}{5x^3+x^2-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^4}{5x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{5} = -\infty$

2) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{9x^2+6x+1}-3x$ (FI $\infty-\infty$) → conjugué

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{[\sqrt{9x^2+6x+1}-3x]\times[\sqrt{9x^2+6x+1}+3x]}{\sqrt{9x^2+6x+1}+3x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{9x^2+6x+1-9x^2}{\sqrt{9x^2+6x+1}+3x} = \lim \frac{6x+1}{\sqrt{9x^2(1+\underbrace{\frac{6}{9}x}_{0}+\underbrace{\frac{1}{9x^2}}_{0})}+3x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+1}{3x\sqrt{(1)}+3x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{6x} = 1$

3) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-e^{\sin 0}}{x-0}$

$= (e^{\sin x})'(0) = (\cos x\, e^{\sin x})(0) = 1$

Exercice 2 (2-2 points) Calculer les dérivés des fonctions suivantes :
(1) $\boldsymbol{g(x) = x^4\, 4^x}$ (2) $\boldsymbol{h(x) = \tan\left(\ln\left(x^2\right)\right)}$

1) $g(x) = x^4 4^x$ $a^x = e^{x \ln a}$

$g(x) = x^4 e^{x \ln 4}$

$\to g'(x) = 4x^3 \cdot 4^x + x^4 \cdot \ln 4\, e^{x \ln 4}$

$= 4x^3 \cdot 4^x + x^4 \cdot \ln 4\; 4^x$

$= 4^x x^3 (4 + x \ln 4)$

2) $h(x) = \tan(\ln(x^2))$

$= \tan(2 \ln x)$

$\to (\tan' x) = 1 + \tan^2 x$

$\Rightarrow h'(x) = \frac{2}{x} \cdot (1 + \tan^2(2 \ln x))$

Exercice 3 (2-2-2-2 points) Déterminer les développements limités : (1) $\boldsymbol{DL_3(0)}$ de $e^{\sin x}$ (2) $\boldsymbol{DL_6(0)}$ de $\mathbf{arctan}(x^2)$ (3) $\boldsymbol{DL_2(1)}$ de $(4+x)^{1/4}$ (4) $\boldsymbol{DL_4(0)}$ de $\frac{1}{\cos(x)-x^2}$

1) $DL_3(0)$ de $e^{\sin x}$ $\quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon(x) = u(x)$

$e^{\sin x} = e^{u(x)} = 1 + u(x) + \frac{1}{2}u^2(x) + \frac{1}{3!}u^3(x) + \dots$

$e^{\sin x} = 1 + x + x^2\frac{1}{2} + x^3\left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{3!}\right) + x^3\varepsilon(x)$

$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + x^3\varepsilon(x)$

2) $DL_6(0)$ de $\arctan(x^2)$ On passe par la dérivée de arctan

$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 - x^2\varepsilon(x)$

donc $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$

et $\arctan x^2 = x^2 - \frac{x^6}{3} + x^6\varepsilon(x)$

3) $DL_2(1)$ de $(4+x)^{1/4}$

$(4+x)^{1/4} = (4+1-1+x)^{1/4} = (5+x-1)^{1/4} = 5^{1/4}\left(1 + \frac{(x-1)}{5}\right)^{1/4}$

Soit $t = \frac{x-1}{5}$ $\quad t \to 0$ qd $x \to 1$.

$\to 5^{1/4}(1+t)^{1/4} = 5^{1/4}\left(1 + \frac{1}{4}t + \frac{1}{2}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}-1\right)t^2 + t^2\varepsilon(t)\right)$

soit $(4+x)^{1/4} = 5^{1/4}\left(1 + \frac{1}{4}\frac{x-1}{5} - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{(x-1)^2}{5^2} + (x-1)^2\varepsilon(x-1)\right)$

4) $DL_4(0)$ $\frac{1}{\cos(x) - x^2}$

$\cos(x) - x^2 = \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} \dots\right) - x^2$

$= 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^4\varepsilon(x)$

$= 1 + u(x)$

et $\frac{1}{1+u(x)} = 1 - u + u^2 - u^3 \dots$

$\to \frac{1}{\cos(x) - x^2} = 1 + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + \left(-\frac{3x^2}{2}\right)^2 + x^4\varepsilon(x)$

$= 1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{9x^4}{4} - \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon(x)$

$= 1 + \frac{3x^2}{2} + \frac{53}{24}x^4 + x^4\varepsilon(x)$

Exercice 4 (1.5-2.5 points) Calculer :

(1) $l_1 = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^5(x)}{x^4}$

(2) $l_2 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, puis $l_3 = \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

1) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5(x)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^4 x}{x^4} \times \sin x = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \cdot \sin x = 1 \times 0 = \boxed{0}$

↳ cf TD / cours !

2) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{(1-x)})}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)-(1-x)}{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})} \overset{\lim}{=} \frac{2}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2}{1+1} = \boxed{1}$

3) Pour l_3 on pose $y = x^2$ et on retombe sur la même chose et lim $= \boxed{1}$

• **Développements limités en 0 de quelques fonctions usuelles ($DL_n(0)$) :**

1)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + x^n\varepsilon(x)$$

2)

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + \frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p}\varepsilon(x)\ , \quad (n = 2p)$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)\ , \quad (n = 2p+1)$$

3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + ... + (-1)^p\frac{x^{2p}}{(2p)!} + x^{2p}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + x^{2p}\varepsilon(x)\ , \quad (n = 2p)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^p\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + x^{2p+1}\varepsilon(x)\ , \quad (n = 2p+1)$$

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

4)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... + x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + x^n\varepsilon(x)$$

5)

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

6)

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - ... - \frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + x^n\varepsilon(x)$$