Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°1 - 10 octobre 2022 – durée 1h

Exercice 1 (2.5-1-1.5-2 points)
Déterminez en justifiant les limites suivantes avec la technique de votre choix :

1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x+1} - ax$ avec a > 0
selon les 3 conditions suivantes: a = 1, a > 1 et a < 1

$= \lim_{x\to+\infty} \left[\sqrt{\cdots} - ax\right] \frac{\sqrt{\cdots} + ax}{\sqrt{\cdots} + ax}$

$= \frac{x\left[(1-a^2) + 1 + \frac{1}{x}\right.}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} + a}$

$\to$ lim $= \frac{1}{2}$ si $a=1$
lim $= -\infty$ si $a>1$
lim $= +\infty$ si $a<1$

2) $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$ $= \frac{1}{4}$ (dérivée de $f(x) = \sqrt{3+x}$)

3) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$ $= -\frac{1}{2}$ (DL ou Hospital)

4) $\lim_{x\to 0} x\sin(1/x)$ et $\lim_{x\to+\infty} x\sin(1/x)$

$= 0$ (gendarmes) $= 1$ (Hospital)

Exercice 2 (1 – 1 points)
Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1}}$

2) $f(x) = \tan\left(\sqrt{x^2+1}\right)$ $\Rightarrow f' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\left(1+\tan^2\left(\sqrt{x^2+1}\right)\right)$.

Exercice 3 (1.5 – 1.5 points)
Déterminez le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction $f(x) = \sqrt{4+x}$

1. En utilisant la formule de Taylor cf cours
2. En utilisant un DL usuel

$\sqrt{4+x} = 2\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\right) + o(x)\right) - \left(\frac{x}{4}\right)^2\frac{1}{8}$ $= 2 + \frac{1}{4}x + \cancel{o(x)} - \frac{x^2}{64} + o(x^2)$

Exercice 4 (2– 2 – 2 – 2 points)
Déterminez en justifiant les développements limités suivants :

1) DL$_6$(0) de $f(x) = (\cos x)(\sin x)$ $\to$ produit de DL $\to$ $f(x) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$

2) DL$_3$(0) de $f(x) = \frac{e^x}{1-x}$ $\to$ produit $e^x \cdot \frac{1}{1-x}$ $\to f(x) = 1 + 2x + \frac{5x^2}{2} + \frac{16}{6}x^3 + o(x^3)$

3) DL$_2$(2) de $f(x) = \ln(3+x)$ $= \ln(3+2-2+x) = \ln(5+x-2) = \ln(5) + \ln\left(1+\frac{x-2}{5}\right)$

avec $u = \frac{x-2}{5}$

$\to f(x) = \ln 5 + \frac{x-2}{5} - \frac{1}{5}(x-2)^2 + o(x-2)^2$

4) DL$_2$(0) de $f(x) = \frac{x}{1+e^x}$

$\frac{1}{1+e^x} = \frac{1}{1+\left[1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\cdots\right]} = \frac{1}{2+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots}$

$= \frac{1}{2\left(1+\underbrace{\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3!}\cdots\right)}_{u}\right)} = \frac{1}{2}\left[1 - \underbrace{\frac{1}{2}\left(x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{3!}\cdots\right)}_{u} + \underbrace{\frac{1}{4}\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3\cdots}\right)^2}_{u^2}\cdots\right]$

$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}x\right)$

$\Rightarrow \frac{x}{1+e^x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}x^2 + o(x^2)$