Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°2 - 8 novembre 2021 – durée 1h

Exercice 1 (2-2-2-2-2 points)
Déterminez les primitives suivantes :

1) $\int (sin(x))^3 dx$

2) $\int \frac{1}{4x^2+1} dx$

3) $\int \frac{x^3-x+1}{x^2-1} dx$

4) $\int x \arctan(x)\, dx$

5) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Exercice 2 (4 points)
Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2} dx$$

1) En faisant un changement de variable
2) En donnant une interprétation géométrique explicite

Exercice 3 (2 - 2 points)

1) Représenter le domaine :
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 \leq x \leq 1 \; et \; x^2 \leq y \leq 4 - x^3\}$$
2) Calculer son aire.

Exercice 4 (2 - 2 points)

Soit le domaine
$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0 \; et \; x^2 + y^2 \leq 4\}$$

1) Représenter D.

2) Intégrer $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ sur D.

① $\int \sin^3 x \, dx$ $\quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1.

$\sin^3 x = \left(\frac{1}{2i}\right)^3 \left[e^{3ix} - 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} - e^{-3ix}\right].$

$= \frac{1}{8(-i)} \left[\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) - 3\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)\right].$

$= \frac{1}{-8i}\left[2i(\sin(3x)) - 3(2i)(\sin x)\right].$

$= -\frac{1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x$

On intègre : $\int \sin^3 x = \int \left(-\frac{1}{4}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x\right) dx$

$= -\frac{1}{4}\left[\frac{\cos 3x}{-3}\right] + \frac{3}{4}\left[-\cos x\right]$

$= \frac{\cos 3x}{12} - \frac{3}{4}\cos x$ ②

ou encore :

$\int \sin^3 x \, dx = \int \sin^2 \sin \, dx$

$= \int (1 - \cos^2) \sin x \, dx$

$= \int \sin x - \cos^2 \sin \, dx$

$= [-\cos x] + \left[\frac{\cos^3 x}{3}\right]$

② $\int \frac{1}{4x^2+1} dx$ $\quad$ Soit $X = 2x \longrightarrow dX = 2dx$ ②

$\hookrightarrow \int \frac{1}{2} dX \frac{1}{X^2+1} = \frac{1}{2}\int \frac{dX}{X^2+1} = \frac{1}{2} \arctan(X) = \frac{1}{2}\arctan(2x)$

③ Exemple du cours !

$\int \frac{x^3 - x + 1}{x^2 - 1} dx$ ②

$$\begin{array}{l|l} x^3 - x + 1 & x^2 - 1 \\ \hline 1 & x \end{array}$$

$= \int \left(x + \frac{1}{x^2-1}\right) dx$

$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x+1)(x-1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$

$\frac{A(x-1) + B(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{(A+B)x - A + B}{(x+1)(x-1)}.$

$\longrightarrow A + B = 0 \quad A = -B$
$-A + B = 1 \quad A = -1/2 \quad B = 1/2$

$= \int \left(x + \frac{1}{2}\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1}\right) dx$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|$

④ $\int x \arctan x$ ④ $\quad$ IPP $\quad u' = x \quad v = \arctan x.$
$u = \frac{x^2}{2} \quad v' = \frac{1}{1+x^2}.$

$= [uv] - \int uv' =$

$= \frac{x^2}{2}\arctan x - \int \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2} dx \longrightarrow \frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$

$\to \int x \arctan x = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$

$= -\frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]$

$\to \int = \frac{x^2}{2}\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{\arctan x}{2}$

$= \frac{1}{2}\left[(x^2+1)\arctan x - x\right].$

(2)

(5) $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ on pose $u = \sqrt{x}$

$u^2 = x$

$\frac{dx}{du} = 2u \quad dx = 2u\, du.$

$\to \int \frac{1-u}{u}(2u\, du).$

$= \int \frac{2u - 2u^2}{\cancel{u}} du = \int \cancel{\tfrac{2}{u}2u}(2 - 2u)\, du$

(2)

$= 2\left(u - \frac{u^2}{2}\right) = 2u - u^2$

$= 2\sqrt{x} - x$

Exo 2

$$\int_0^4 \sqrt{16-x^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{16\left(1-\left(\frac{x}{4}\right)^2\right)}\,dx = 4\int_0^4 \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\,dx$$

1) On pose $\frac{x}{4} = \sin t$ $\quad x = 4\sin t \quad \frac{dx}{dt} = 4\cos t$

$1-\left(\frac{x}{4}\right)^2 = \cos^2 t$

pour $x=0 \rightarrow \sin t = 0 \rightarrow t = 0$

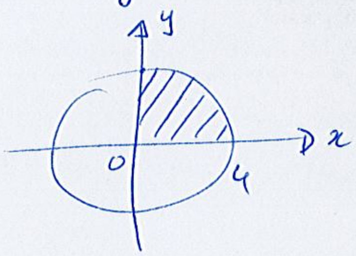
$x = 4 \rightarrow \sin t = 1 \rightarrow t = \frac{\pi}{2}$

2

$$I = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\,.4\cos t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt$$

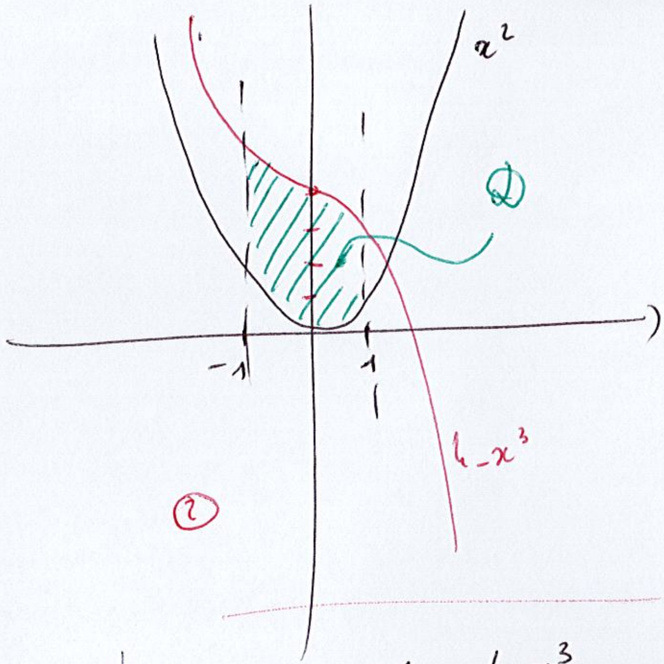
$$= \frac{16}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{2}\,\frac{\pi}{2} = \cancel{\frac{8}{4}}\ 4\pi$$

2) Soit $y^2 = 16 - x^2 \iff x^2+y^2 = 16 \rightarrow$ cercle centré en $(0,0)$ de rayon 4. Pour $x \in [0,4] \rightarrow 1/4$ de disque.



$I = \frac{1}{4}\left(\pi 4^2\right) = 4\pi$ 2

(1)



(2)

en -1 : $x^2 = 1$
$4-x^3 = 5$

en 1 $x^2 = 1$
$4-x^3 = 3$

entre -1 et 1 on a tjs
$x^2 < 4-x^3$.

$x^2 = 4-x^3$
$x^2+x^3 = 4$

$$\rightarrow \mathcal{A} = \int_{-1}^{1}\int_{x^2}^{4-x^3} dy\,dx = \int_{-1}^{1} [y]_{x^2}^{4-x^3} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (4-x^3-x^2)\,dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(4 - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{1}{3} - \left(-4 - \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= \left(8 - \frac{2}{3}\right) = \frac{22}{3}$$

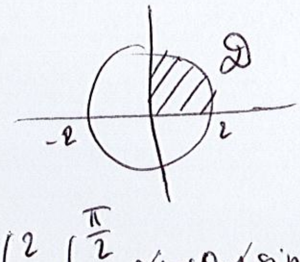
(2)

(2) Soit $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ sur $\mathcal{D}\{x>0 \quad y>0 \quad x^2+y^2 \leq 4\}$

- Représenter $\mathcal{D}$
- Intégrer

$x^2+y^2 = 4 \rightarrow$ cercle de rayon 2

$\mathcal{D} = \frac{1}{4}$ de disque



(2)

$\hookrightarrow$ Polaire !

$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
$dx\,dy = r\,d\theta\,dr$

$$\rightarrow \iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cancel{r}\cos\theta\,\cancel{r}\sin\theta}{\cancel{r^2}}\, r\,d\theta\,dr$$

r θ

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^2 \cos\theta\sin\theta\,d\theta\,r\,dr = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta \int_0^2 r\,dr$$

(2)

$$= \left[\frac{1}{2}\,\frac{\cos(2\theta)}{(-2)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4}(-1-1)\left(\frac{4}{2}\right) = 1$$