

Université de Montpellier - Faculté des Sciences - Département EEA – L2
HAE304X Outils mathématiques pour l'EEA
Contrôle continu n°1 - 11 octobre 2021 – durée 1h

Exercice 1 (1-2-2-1 points)

Déterminez en justifiant les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 4x}{-x^2 - 2x + 8}$

2) $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}}$

3) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1}$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

Exercice 2 (1 - 1 - 1 points)

Déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \arctan(\sin x)$

2) $f(x) = \frac{8^{2x}}{2x}$

3) $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{x}}\right)$

Exercice 3 (1 - 2 - 2 - 2 points)

Déterminez en justifiant les développements limités suivants :

1) $DL_6(0)$ de $f(x) = (\sin x)(\ln(1 + x))$

2) $DL_4(0)$ de $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$

3) $DL_2(1)$ de $f(x) = \ln(2 + x)$

4) $DL_3(0)$ de $f(x) = \tan x$

Exercice 4 (2 - 2 points)

Déterminez les limites suivantes en utilisant les développements limités :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x}$

Formulaire de développement limités

Les développements limités ci-dessous sont valables quand x tend vers 0 et uniquement dans ce cas.

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch} x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n}) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sh} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\cos x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$$

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \dots + \frac{a(a-1)\dots(a-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \quad (a \text{ réel donné})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + o(x^n) \text{ et en particulier } (1+x)^a \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + ax + o(x) \text{ et donc } \sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$$

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} + \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n) \underset{x \rightarrow 0}{=} - \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$$

$$\operatorname{Arctan} x \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

$$\underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1})$$

Exo 1/6

$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 4x}{-x^2 - 2x + 8} \quad \text{FI } \frac{0}{0} \quad \text{Hopital: } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x + 4}{-2x + 2} \rightarrow -\frac{2}{3} \quad (1)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} \quad \text{FI } \frac{0}{0} \quad \frac{x^2 - 4}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x + 2)}{\sqrt{2} - \sqrt{x}} = -(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x + 2)$

$\lim_{x \rightarrow 2} = -(\sqrt{2} + \sqrt{2})(2 + 2) = -8\sqrt{2} \quad (2)$

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1} \quad \text{FI } \frac{0}{0} \quad \lim = f'(1) = \frac{1}{2} \quad (2)$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \quad \text{FI } \frac{0}{0} \quad \lim = f'(0) = 1 \quad (1)$

Exo 2/3

$f(x) = \arcsin(\sin x) \quad f'(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} \quad (1)$

$f(x) = \frac{8^{2x}}{2x} = \frac{e^{2x \ln 8}}{2x} \quad f'(x) = \frac{8^{2x} (2x \ln 8 - 1)}{2x^2} \quad (1)$

$f(x) = \ln \sqrt{x^2 + \frac{1}{2}} = \ln \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad f'(x) = \frac{1}{2x} \left(\frac{2x^3 - 1}{x^3 + 1}\right) \quad (1)$

Exo 3/7

$\ln(1+x) \sinh x \sim \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right) \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right) = x^2 - \frac{x^3}{2} + x^4 \left(\frac{-1}{3!} + \frac{1}{3}\right) + x^5 \left(\frac{1}{2 \times 3!} + \frac{1}{4}\right)$
 $\sim x^2 - \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{6} + \frac{11}{72} x^6 + o(x^6) \quad \left| \quad + x^6 \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{3 \cdot 3!}\right) + o(x^6) \quad (1)$

$\frac{1}{1+x+x^2} \quad \text{with } u = x+x^2 \rightarrow \frac{1}{1+u} \sim 1 - u + u^2 - u^3 \dots$

donc $\frac{1}{1+x+x^2} \sim 1 - x + x^3 - x^4 + o(x^4) \quad (2)$

$\ln(2+x) = \ln(2+x+1-1) = \ln(3+x-1) \quad x-1 \rightarrow 0 \quad x \rightarrow 1$
 $= \ln\left(3\left(1 + \frac{x-1}{3}\right)\right)$
 $= \ln 3 + \ln\left(1 + \frac{x-1}{3}\right) \quad u = \frac{x-1}{3}$

$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$

$\rightarrow \ln(2+x) \sim \ln 3 + \left(\frac{x-1}{3}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{3}\right)^2 + o(x-1)^2 \quad (2)$

$\tan(x) \sim x + \frac{x^3}{3} + o(x^3) \quad (2)$

Exo 4/4

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\ln(1+x) - \ln(1-x)}$$

$$= \frac{2x}{\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(-x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)} \rightarrow \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)\right) - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right)}{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}$$

$$\rightarrow \frac{0 - x^2 + o(x^2)}{+\frac{x^2}{2} + o(x^2)} \rightarrow -2$$