

UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
- FACULTÉ DES SCIENCES -
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

Année Universitaire 2021-2022
Licence - HAS102X

HAS102X

Outils Mathématiques 2

Notes de Cours

Michele BOLOGNESI (¹)

¹Département de Mathématiques, CC 051, Université de Montpellier Pl. Eugène Bataillon, 34095 Montpellier cedex 5. Mail : michele.bolognesi@umontpellier.fr, avec beaucoup de remerciements à L.Guieu

Chapitre 1: Calcul différentiel dans \mathbb{R}^2

Attention ! Dans ce dernier chapitre, nous travaillerons essentiellement dans \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^3 dont on peut écrire les éléments sous la forme :

$$(x, y); x, y \in \mathbb{R}.$$

$$(x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}.$$

Définition 1.0.1

Un n -plet de valeurs réelles (avec $n = 2, 3$) est appelé un vecteur n -dimensionnel.

1.1 Fonctions de deux variables

Définition 1.1.1

Soit U un domaine de \mathbb{R}^2 . Une **fonction de deux variables** définie sur U est une application

$$f : U \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y)$$

qui à tout point (x, y) de U associe un unique nombre réel $f(x, y)$. La partie U sera appelée **domaine de définition** de la fonction f .

Une fonction de deux variables peut être visualisée grâce à son graphe et ses ensembles de niveau (ces ensembles seront dans la presque totalité des cas des courbes) :

Définition 1.1.2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1. Le **graphe** de f , noté \mathcal{G}_f , est la partie de l'espace \mathbb{R}^3 ainsi définie :

$$\mathcal{G}_f := \{(x, y, z) \mid (x, y) \in U \text{ et } z = f(x, y)\} = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in U\}$$

2. Si $z_0 \in \mathbb{R}$, l'**ensemble de niveau** z_0 de f , noté \mathcal{C}_{z_0} , est la partie du plan \mathbb{R}^2 ainsi définie :

$$\mathcal{C}_{z_0} = \{(x, y) \in U \mid f(x, y) = z_0\}.$$

Exemple Considérons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = x^2 + y^2.$$

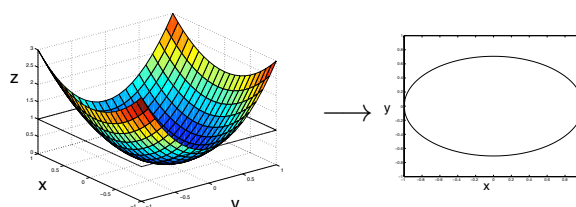
Le graphe de f est l'ensemble des points (x, y, z) tels que $z = x^2 + y^2$. On obtient ainsi une sorte de cuvette infinie dont chaque tranche verticale est une parabole. Une telle surface s'appelle un parabolôide de révolution¹. Si $z_0 \in \mathbb{R}$, la courbe de niveau \mathcal{C}_{z_0} est donnée, dans le plan des (x, y) , par l'équation :

$$x^2 + y^2 = z_0.$$

Notons $C(0, r)$ le cercle de centre l'origine $(0, 0)$ et de rayon r . On a alors :

$$\mathcal{C}_{z_0} = \begin{cases} C(0, \sqrt{z_0}) & \text{si } z_0 > 0 \\ \{(0, 0)\} & \text{si } z_0 = 0 \\ \emptyset & \text{si } z_0 < 0 \end{cases}$$

Autrement dit, les courbes de niveau de f donnent ici une famille de cercles concentriques. Ceci n'est pas sans rappeler les cartes IGN où sont dessinées les courbes des points d'altitude constante : ce sont exactement les courbes de niveau de la fonction "altitude", fonction dont le domaine de définition U est la carte en question.



Remarque

1. Le graphe d'une fonction est toujours une surface de l'espace \mathbb{R}^3 . Attention, cependant, au fait que toute surface n'est pas forcément le graphe d'une fonction...
2. Lorsque z_0 est dans l'ensemble des valeurs de f , la courbe de niveau z_0 est l'image d'une courbe de \mathbb{R}^2 . On peut aussi la voir comme la projection orthogonale sur le plan des (x, y) de la courbe obtenue par intersection du graphe avec le plan horizontal d'altitude z_0 :

$$\mathcal{C}_{z_0} = \mathbf{p}(\mathcal{G}_f \cap P_{z_0})$$

où P_{z_0} désigne le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $z = z_0$ et $\mathbf{p} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la projection orthogonale sur le plan des xy .

¹Cette surface peut aussi s'obtenir en faisant tourner le graphe de la fonction d'une variable $y \mapsto y^2$ autour de l'axe des z .

1.2 Notion de dérivée partielle

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $(a, b) \in U$ un point fixé. Définissons alors les deux parties de \mathbb{R} suivantes :

$$I_a := \{y \in \mathbb{R} \mid (a, y) \in U\} \quad I^b := \{x \in \mathbb{R} \mid (x, b) \in U\}.$$

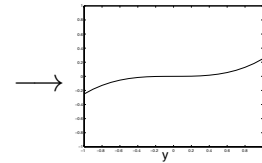
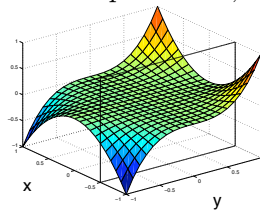
On définit ensuite les deux fonctions d'une variable suivantes :

$$f_a : I_a \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto f_a(y) = f(a, y)$$

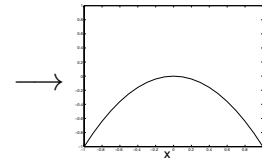
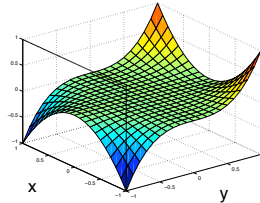
$$f^b : I^b \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f^b(x) = f(x, b).$$

Parfois on appelle ces deux fonctions *fonctions partielles*;

- Le graphe de f_a s'obtient en fixant la première variable à a , c'est à dire en coupant le graphe de f par le plan $x = a$.



- Le graphe de f^b s'obtient en fixant la seconde variable à b , c'est à dire en coupant le graphe de f par le plan $y = b$.



On appellera ces deux fonctions **les fonctions partielles associées à f au point (a, b)** . Ceci nous permet alors d'écrire la :

Définition 1.2.1

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, $(a, b) \in U$ un point fixé et f_a, f^b les fonctions partielles associées. Supposons, en outre, que f_a est dérivable en $y = b$ et que f^b est dérivable en $x = a$. On définit alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := (f^b)'(a) = \frac{d}{dx} [f(x, b)]_{x=a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := (f_a)'(b) = \frac{d}{dy} [f(a, y)]_{y=b}.$$

Les nombres $\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$ sont respectivement appelés :

- **dérivée partielle (première)** de f par rapport à x au point (a, b) ;
- **dérivée partielle (première)** de f par rapport à y au point (a, b) .

Exemple Considérons la fonction suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto f(x, y) = (x + y) \sin(x).$$

On a alors :

$$f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : y \mapsto f_a(y) = (a + y) \sin(a)$$

$$f^b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f^b(x) = (x + b) \sin(x).$$

Ces deux fonctions sont clairement dérivables. On peut donc calculer leurs dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) := (f^b)'(a) = \frac{d}{dx} [(x + b) \sin(x)]_{x=a} = \sin(a) + (a + b) \cos(a)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) := (f_a)'(b) = \frac{d}{dy} [(a + y) \sin(a)]_{y=b} = \sin(a).$$

En pratique : Pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on dérive la fonction de x :

$$x \mapsto f(x, y)$$

en considérant y comme constante, “figée”. On procède de manière analogue pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Définition 1.2.2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables.

1. f sera dite **continue au point** (a, b) si :

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

2. f sera dite **continue** si elle est continue en tout point de U .

Vocabulaire :

1. Si une fonction de deux variables $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, on dira qu'elle est **de classe** C^0 . Si f possède des dérivées partielles premières en tout point de U et que les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} : U \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : U \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont toutes les deux continues, on dira que f est **de classe** C^1 .
2. De manière analogue, si une courbe $\Gamma : I \rightarrow U$ est continue, elle sera dite **de classe** C^0 . Si Γ est dérivable et que sa courbe dérivée $\Gamma' : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est continue, elle sera dite **de classe** C^1 .
3. De manière analogue, si une fonction d'une variable $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle sera dite **de classe** C^0 . Si g est dérivable et que sa dérivée $g' : I \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle sera dite **de classe** C^1 .

Remarquons que dans les cas 2) et 3), “ C^1 implique C^0 ”. C'est aussi vrai dans le cas (1), mais cela est plus subtil à montrer: nous l'admettrons.

Nous donnons maintenant deux applications de la notion de dérivée partielle :

Proposition 1.2.3

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $\Gamma : I \rightarrow U : t \mapsto (x(t), y(t))$ une courbe dans le domaine U , de classe C^1 . Alors la fonction d'une variable $f \circ \Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}$ est aussi de classe C^1 , et, pour tout t dans I on a :

$$(f \circ \Gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t)$$

Preuve: admise ■

Exemple Considérons la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3 - y^2 + e^{xy}$$

et la courbe suivante :

$$\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto (x(t), y(t)) = (t, t^2).$$

On a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + ye^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y + xe^{xy}, \quad \Gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = (1, 2t)$$

On vérifie que f et Γ sont de classe C^1 , puis on calcule :

$$\begin{aligned} (f \circ \Gamma)'(t) &= (3x(t)^2 + y(t)e^{x(t)y(t)}) x'(t) + (-2y(t) + x(t)e^{x(t)y(t)}) y'(t) \\ &= (3t^2 + t^2 e^{t^3})1 + (-2t^2 + t e^{t^3})2t \\ &= 3t^2 - 4t^3 + 3t^2 e^{t^3}. \end{aligned}$$

Astuce mnémotechnique

$$\frac{d}{dt}(f(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

(Dans cette écriture, on sous-entend bien-sûr que chacune des deux variables x et y dépend du temps t , et que $t \mapsto (x, y)$ représente la courbe Γ .)

Passons maintenant à une deuxième application de la notion de dérivée partielle : la recherche d'extremums. Faisons d'abord un point de vocabulaire :

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables et $M_0 = (x_0, y_0)$ un point de U :

1. on dira que f possède un **maximum** au point M_0 si $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$, pour tout point $M = (x, y)$ de U ;
2. on dira que f possède un **minimum** au point M_0 si $f(x, y) \geq f(x_0, y_0)$, pour tout point $M = (x, y)$ de U ;

3. on dira que f possède un **extremum** au point M_0 si f possède un maximum ou bien un minimum en ce point.

Définition 1.2.4

Un point $x \in U$ est dit *intérieur* si c'est un point de U tel qu'il existe autour de lui un petit disque tout entier inclus dans U .

On a alors le résultat suivant :

Proposition 1.2.5

Si une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 possède un extremum au point M_0 , et si nous supposons que M_0 est intérieur à U , alors les deux dérivées partielles premières de f s'annulent en ce point :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

Preuve: Supposons, par exemple, que f présente un maximum au point (x_0, y_0) . On a donc $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ pour tout point (x, y) de U . Notons $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction partielle $x \mapsto f(x, y_0)$, définie sur $I = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in U\}$. Comme f est C^1 , g est dérivable. De plus, g possède un maximum en x_0 puisque $g(x) \leq g(x_0)$ pour tout $x \in I$. Alors $g'(x_0) = 0$, ce qui s'écrit aussi $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. On procéderait de manière analogue pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$. ■

On remarque que ce résultat est l'analogie - pour les fonctions de deux variables - du résultat classique des fonctions d'une variable : si une fonction dérivable $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ possède un extremum en t_0 , alors $g'(t_0) = 0$. Remarquons également que dans l'énoncé de ce résultat, le domaine U ne peut pas être "n'importe quoi" : il doit avoir certaines propriétés dont l'exposé dépasserait le cadre de ce cours.

Attention ! De même que dans le cas d'une variable, la réciproque de cette assertion est fautive : les deux dérivées partielles premières de f peuvent très bien s'annuler en un même point sans que la fonction possède nécessairement un extremum en ce point. L'intérêt de ce résultat est surtout de pouvoir déterminer, pour une fonction donnée, quel point est un extremum "possible"; il faut une étude supplémentaire pour pouvoir conclure.

Exemple Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$. On remarque visuellement (sur le graphe) que cette fonction possède un minimum en $(0, 0)$. Cela est facile à vérifier :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq 0 = f(0, 0).$$

Comme le prédit le résultat ci-dessus, on a bien :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Exemple Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x^3$. Cette fonction vérifie

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

mais on remarque visuellement (sur le graphe) qu'elle n'a pas de min ni de max en $(0, 0)$. En effet, $f(1, 0) = 1$, $f(-1, 0) = -1$, et $f(0, 0) = 0$.

1.3 Dérivées partielles secondes

Définition 1.3.1

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables vérifiant les deux conditions suivantes :

1. f admet des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en tout point (x, y) de U ;
2. les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x} : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $\frac{\partial f}{\partial y} : U \rightarrow \mathbb{R}$ admettent à leur tour des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de U .

On définit alors les quatre fonctions suivantes :

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} := \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$;
- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$;

que l'on appellera **dérivées partielles secondes de f** .

Vocabulaire : Si la fonction f possède des dérivées partielles secondes en tout point de U , et si chacune des quatre fonctions $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ est continue, on dira que f est de classe C^2 . On admettra que si une fonction de deux variables f est de classe C^2 alors elle est aussi de classe C^1 .

On a alors l'important théorème suivant :

Théorème 1.3.2 Théorème de Schwarz

Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^2 , on a alors, en tout point (x, y) de U :

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)}.$$

Preuve: admise ■

Attention ! A partir de ce point, toutes nos fonctions de deux variables seront supposées de classe C^2 .

Exemple Considérons de nouveau la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto (x + y) \sin(x).$$

dont les deux dérivées partielles premières ont déjà été calculées. Occupons-nous de ses dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x) + (x + y) \cos(x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x)) + \frac{\partial}{\partial x} (x + y) \cos(x) + (x + y) \frac{\partial}{\partial x} (\cos(x)) \\
&= \cos(x) + 1 \times \cos(x) + (x + y)(-\sin(x)) \\
&= 2 \cos(x) - (x + y) \sin(x).
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x)) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\sin(x)) = \cos(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x) + (x + y) \cos(x)) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} (\sin(x)) + \cos(x) \frac{\partial}{\partial y} (x + y) \\
&= 0 + \cos(x) \times 1 \\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Un des intérêts du théorème de Schwarz est justement de nous dispenser du quatrième calcul !

1.4 Formes différentielles

Définition 1.4.1

On définit les deux fonctions suivantes sur $(\mathbb{R}^2)^*$:

$$\mathbf{dx} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto x.$$

$$\mathbf{dy} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad (x, y) \mapsto y.$$

Plus géométriquement, \mathbf{dx} est la projection orthogonale sur l'axe des x :

$$\mathbf{dx}(x_0, y_0) = x_0$$

et \mathbf{dy} est la projection orthogonale sur l'axe des y :

$$\mathbf{dy}(x_0, y_0) = y_0.$$

On pourra aussi remarquer (du point de vue des matrices) que \mathbf{dx} est la transposée de la matrice-colonne E_1 et que \mathbf{dy} est la transposée de la matrice-colonne E_2 .

Proposition 1.4.2

A partir d'un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ on peut définir une fonction sur \mathbb{R}^2 :

$$\phi = a \mathbf{dx} + b \mathbf{dy}.$$

qui donne

$$\phi(x, y) = ax + by.$$

1.5 Formes différentielles sur un domaine de \mathbb{R}^2

Définition 1.5.1

Une **forme différentielle** sur une partie U de \mathbb{R}^2 est une application ω définie sur U qui, à tout point (x, y) de U associe une fonction du type

$$\omega_1(x, y)dx + \omega_2(x, y)dy.$$

Ici les $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions réelles définies sur U .

De façon non complètement précise on peut dire que ω est une application de U vers l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$ des fonctions réelles définies sur \mathbb{R}^2 .

Exemple Soit ω la forme différentielle sur \mathbb{R}^2 définie par :

$$\omega(x, y) = x^3 \mathbf{dx} + \sin(x) \cos(y) \mathbf{dy}.$$

De plus, si $p = (u, v) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$\omega(x, y)(p) = \omega(x, y)(u, v) = x^3 u + \sin(x) \cos(y) v.$$

On va maintenant définir deux opérations sur l'ensemble des formes différentielles : la somme de deux formes différentielles et le produit d'une forme différentielle par une fonction de deux variables :

Définition 1.5.2

Soit $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de deux variables sur U et :

$$\omega(x, y) = a(x, y) \mathbf{dx} + b(x, y) \mathbf{dy} \quad \nu(x, y) = p(x, y) \mathbf{dx} + q(x, y) \mathbf{dy}$$

deux formes différentielles sur U .

1. On appellera **produit de la forme ω par la fonction h** et on notera $h \cdot \omega$ la forme différentielle sur U définie par :

$$(h \cdot \omega)(x, y) = h(x, y)\omega(x, y)$$

2. On appellera **somme des formes ω et ν** et on notera $\omega + \nu$ la forme différentielle sur U définie par :

$$(\omega + \nu)(x, y) = \omega(x, y) + \nu(x, y).$$

En d'autres termes :

$$(h \cdot \omega)(x, y) = h(x, y)a(x, y) \mathbf{dx} + h(x, y)b(x, y) \mathbf{dy}$$

et

$$\begin{aligned} (\omega + \nu)(x, y) &= \omega(x, y) + \nu(x, y) \\ &= (a(x, y) + p(x, y)) \mathbf{dx} + (b(x, y) + q(x, y)) \mathbf{dy} \end{aligned}$$

1.6 Différentielle d'une fonction de deux variables

Définition 1.6.1

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 de deux variables sur U . On lui associe une forme différentielle sur U , notée $\mathbf{d}f$, de la manière suivante :

$$\mathbf{d}f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \mathbf{dy}$$

La forme $\mathbf{d}f$ est appelée **la différentielle de f** .

Exemple Si $f(x, y) = (x + y) \sin(x)$ alors :

$$\mathbf{d}f_{(x,y)} = (\sin(x) + (x + y) \cos(x)) \mathbf{dx} + \sin(x) \mathbf{dy}$$

Comme nous avons plus de confiance avec la différentielle d'une fonction, on peut regarder à nouveau la Prop; 1.2.3, en comprenant mieux sa signification. Prenez le temps de la réviser tout de suite.

Proposition 1.6.2

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 de deux variables et $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction d'une variable de classe C^1 . Alors la fonction de deux variables $v \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par :

$$\mathbf{d}(v \circ f) = (v' \circ f) \cdot \mathbf{d}f.$$

Preuve: Une fois encore, on va se borner à vérifier la formule : pour tout point (x, y) de U , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(v \circ f)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(v(f(x, y)))\mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(v(f(x, y)))\mathbf{d}y \\ &= v'(f(x, y))\frac{\partial}{\partial x}(f(x, y))\mathbf{d}x + v'(f(x, y))\frac{\partial}{\partial y}(f(x, y))\mathbf{d}y \\ &= v'(f(x, y))\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{d}y\right) \\ &= v'(f(x, y)) \mathbf{d}f_{(x,y)} \\ &= ((v' \circ f) \cdot \mathbf{d}f)_{(x,y)} \end{aligned}$$

■

Enfin, la différentielle permet aussi de ré-écrire la proposition 1.2.5:

Proposition 1.6.3

Si une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 possède un extremum au point $M_0 \in U$, alors

$$\mathbf{d}f_{M_0} = 0.$$

Dans la proposition suivante, nous donnons un recueil des principales formules à connaître pour pouvoir faire des calculs faisant intervenir des différentielles :

Proposition 1.6.4

Soient $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 et λ un nombre réel.

1. La fonction $f + g$ est aussi de classe C^1 et on a : $\boxed{\mathbf{d}(f + g) = \mathbf{d}f + \mathbf{d}g}$.
2. La fonction λf est aussi de classe C^1 et on a : $\boxed{\mathbf{d}(\lambda f) = \lambda \mathbf{d}f}$.
3. La fonction fg est aussi de classe C^1 et on a : $\boxed{\mathbf{d}(fg) = g \cdot \mathbf{d}f + f \cdot \mathbf{d}g}$.
4. Si g ne s'annule jamais, alors la fonction f/g est aussi de classe C^1 et on a : $\boxed{\mathbf{d}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2} \cdot (g \cdot \mathbf{d}f - f \cdot \mathbf{d}g)}$.
5. Si f est une fonction constante, alors $\mathbf{d}f = 0$.

Preuve:

1.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}(f + g)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}((f + g)(x, y))\mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}((f + g)(x, y))\mathbf{d}y \\
 &= \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y) + g(x, y))\mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y) + g(x, y))\mathbf{d}y \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)\mathbf{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)\mathbf{d}y \\
 &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{d}y\right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\mathbf{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\mathbf{d}y\right) \\
 &= \mathbf{d}f(x, y) + \mathbf{d}g(x, y)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}(\lambda f)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}(\lambda f(x, y))\mathbf{d}x + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda f(x, y))\mathbf{d}y \\
 &= \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{d}x + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{d}y \\
 &= \lambda \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{d}y\right) \\
 &= \lambda \mathbf{d}f(x, y)
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}(fg)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}((fg)(x, y))\mathbf{dx} + \frac{\partial}{\partial y}((fg)(x, y))\mathbf{dy} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(f(x, y)g(x, y))\mathbf{dx} + \frac{\partial}{\partial y}(f(x, y)g(x, y))\mathbf{dy} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)g(x, y) + f(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)\mathbf{dx} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x, y) + f(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)\mathbf{dy} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)g(x, y)\mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x, y)\mathbf{dy}\right) + \left(f(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\mathbf{dx} + f(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\mathbf{dy}\right) \\
&= g(x, y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{dy}\right) + f(x, y)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\mathbf{dx} + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\mathbf{dy}\right) \\
&= g(x, y)\mathbf{d}f(x, y) + f(x, y)\mathbf{d}g(x, y)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}\left(\frac{f}{g}\right)(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right)\mathbf{dx} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f(x, y)}{g(x, y)}\right)\mathbf{dy} \\
&= \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)g(x, y) - f(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)}{g(x, y)^2}\mathbf{dx} + \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x, y) - f(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)}{g(x, y)^2}\mathbf{dy} \\
&= \frac{1}{g(x, y)^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)g(x, y) - f(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\right)\mathbf{dx} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)g(x, y) - f(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right)\mathbf{dy}\right] \\
&= \frac{1}{g(x, y)^2}\left(g(x, y)\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\mathbf{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\mathbf{dy}\right) - \right. \\
&\quad \left. f(x, y)\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y)\mathbf{dx} + \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\mathbf{dy}\right)\right) \\
&= \frac{1}{g(x, y)^2}\left(g(x, y)\mathbf{d}f(x, y) - f(x, y)\mathbf{d}g(x, y)\right)
\end{aligned}$$

5. Si f est constante, les deux dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont identiquement nulles et par suite $\mathbf{d}f(x, y) = 0$ pour tout (x, y) dans U .

■

1.7 Formes différentielles fermées et exactes

Définition 1.7.1

Soit $\omega(x, y) = a(x, y) \mathbf{d}x + b(x, y) \mathbf{d}y$ une forme différentielle sur U dont on supposera que les fonctions composantes a et b sont de classe C^1 .

- On dira que ω est **exacte** si il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que :

$$\omega = \mathbf{d}f.$$

- On dira que ω est **fermée** si la condition suivante est réalisée en tout point (x, y) de U :

$$\frac{\partial a}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial b}{\partial x}(x, y).$$

Autrement dit ω est exacte si on est capable de trouver f telle que l'on ait :

$$a(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \quad \text{et} \quad b(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

en tout point (x, y) de U .

Théorème 1.7.2

Toute forme exacte est fermée.

Preuve: En effet si $\omega = \mathbf{d}f$, alors $a = \frac{\partial f}{\partial x}$ et $b = \frac{\partial f}{\partial y}$. La fonction f étant supposée de classe C^2 , le théorème de Schwarz nous dit alors que :

$$\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Notre forme ω est donc fermée. ■

Remarque

1. Par contraposition de l'implication précédente, on a aussi le résultat utile suivant :

$$\omega \text{ non-fermée} \Rightarrow \omega \text{ non-exacte}$$

2. La réciproque du théorème 1.7.2 est fautive : il existe des formes fermées et non-exactes. C'est par exemple le cas de la forme différentielle suivante (on le vérifiera dans la section suivante) :

$$\omega(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{d}x - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{d}y$$

définie sur $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$.

3. Il existe des formes différentielles qui ne sont même pas fermées. La forme différentielle

$$\nu(x, y) = y \, dx - x \, dy$$

est un exemple d'une telle forme puisque :

$$\frac{\partial a}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial x} = 1 - (-1) = 2 \neq 0.$$

1.8 Intégration sur un chemin d'une forme différentielle

Définition 1.8.1

Soit U une partie de \mathbb{R}^2 (resp. de \mathbb{R}^3) et M et N deux points de U .

- Un **arc régulier par morceaux** dans U de M à N est une courbe continue (i.e. $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions continues) Γ :

$$\Gamma : I = [t_0, t_n] \rightarrow U : t \mapsto (x(t), y(t))$$

vérifiant les conditions suivantes :

1. $M = \Gamma(t_0)$ et $N = \Gamma(t_n)$;
2. $I = I_0 \cup I_1 \cup \dots \cup I_{n-1}$ avec

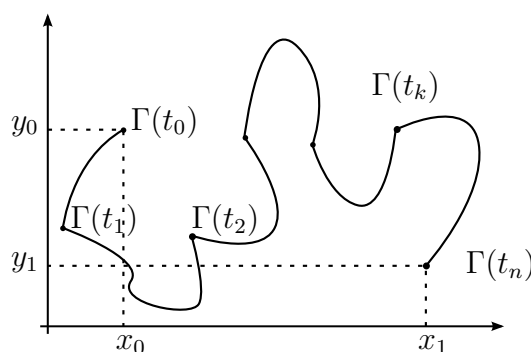
$$I_k = [t_k, t_{k+1}] \quad \text{et} \quad t_0 < t_1 < \dots < t_k < t_{k+1} < \dots < t_n;$$

3. Γ est de classe C^1 sur chaque sous-intervalle I_k .

La définition pour une courbe de \mathbb{R}^3 est tout à fait analogue. La seule différence est que les coordonnées sont 3 et non 2.

- Un **chemin régulier par morceaux** dans U de M à N est l'image \mathcal{C} d'un arc Γ régulier par morceaux dans U de M à N :

$$\mathcal{C} = \Gamma(I) = \{\Gamma(t) \mid t \in I\}.$$



Définition 1.8.2

La fonction Γ est appelée une *paramétrisation* de la courbe.

Remarque Une même courbe dans \mathbb{R}^2 (ou \mathbb{R}^3) peut avoir des différentes paramétrisations. Par exemple le segment $[0, 1]$ sur l'axe des x peut être paramétré par

$$\begin{aligned} x \in [0, 1] &\mapsto [x, 0]; \\ x \in [0, 1] &\mapsto [x^3, 0]; \\ x \in [-2, -1] &\mapsto [x + 2, 0]; \\ &\text{etc...} \end{aligned}$$

Définition 1.8.3

La dérivée

$$\begin{aligned} \Gamma' : I = [t_0, t_n] &\rightarrow \mathbb{R}^2; \\ t &\mapsto (x'(t), y'(t)); \end{aligned}$$

est dite aussi *vecteur vitesse* de la paramétrisation Γ . Le vecteur vitesse d'une courbe dépend du choix d'une paramétrisation. Bien entendu une définition analogue existe pour \mathbb{R}^3 .

La définition de vecteur vitesse peut s'abstraire ultérieurement, notamment grâce à la définition suivante.

Définition 1.8.4

Soit $E = \mathbb{R}^n$. Un champ de vecteurs de classe de régularité C^k est une application F de classe C^k de E dans E :

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Exemple Un champ de vecteurs F est appelé champ de gradient quand il existe une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que, en tout point, F est le gradient de f , i.e.

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

On dit encore que F dérive du potentiel f . Les différents potentiels d'un même champ de vecteurs diffèrent d'une constante.

Exemple Le champ de vecteurs $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définit par

$$G : (x, y, z) \mapsto (2x, 2y, 2z);$$

est le champ de gradient de

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}; \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned} \quad (1.1)$$

En effet $\frac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial g}{\partial y} = 2y$ et $\frac{\partial g}{\partial z} = 2z$.

Définition 1.8.5

Soit U une partie de \mathbb{R}^2 (ou de \mathbb{R}^3) et M et N deux points de U . Soit ω une forme différentielle à composantes continues sur U et $\Gamma : I = [t_0, t_n] \rightarrow U$ un arc régulier par morceaux dans U joignant M à N . On définit alors le nombre suivant :

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_{t_0}^{t_1} \omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t)) dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t)) dt \quad (*)$$

Ce nombre est alors appelé **l'intégrale de la forme ω le long de l'arc Γ** .

Afin de bien comprendre le signification de l'écriture (*) ci dessus, il faut que nous donnons du sens à l'application d'une forme différentielle à la dérivée d'un arc, comme par exemple $\Gamma'(t)$.

Supposons donc que $\omega(x, y) = a(x, y) \mathbf{dx} + b(x, y) \mathbf{dy}$ avec a et b continues sur U . Posons $F(t) = \omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t))$. C'est une fonction d'une variable $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ qui est définie explicitement:

$$F(t) = a(x(t), y(t)) x'(t) + b(x(t), y(t)) y'(t).$$

La fonction d'une variable $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est donc continue sur chaque sous-intervalle I_k et on a par conséquent :

$$\int_{\Gamma} \omega := \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt + \cdots + \int_{t_{n-1}}^{t_n} F(t) dt$$

qui est bien définie. Tout cela pourrait être expliqué de manière plus simple et cohérent avec quelques notions de bases d'algèbre linéaire, que vous allez avoir dans le deuxième semestre.

Proposition 1.8.6

Le nombre

$$\int_{\Gamma} \omega$$

ne dépend pas du paramétrage Γ mais seulement du chemin associé $\mathcal{C} = \Gamma(I)$.

Preuve: Pour simplifier, considérons qu'il n'y a qu'un seul sous-intervalle dans la subdivision :

$$\Gamma : [t_0, t_1] \rightarrow U : t \mapsto \Gamma(t).$$

Considérons à présent un changement de paramètre $s \mapsto t$, c'est-à-dire une fonction

$$\varphi : [s_0, s_1] \rightarrow [t_0, t_1] : s \mapsto \varphi(s) = t$$

de classe C^1 à dérivée φ' strictement positive et telle que $\varphi(s_0) = t_0$ et $\varphi(s_1) = t_1$. Posons ensuite

$$\tilde{\Gamma} : J = [s_0, s_1] \rightarrow U : s \mapsto \tilde{\Gamma}(s) = \Gamma(\varphi(s))$$

autrement dit : $\tilde{\Gamma} = \Gamma \circ \varphi$ et Γ sont deux paramétrages différents du même chemin :

$$\mathcal{C} = \tilde{\Gamma}([s_0, s_1]) = \Gamma([t_0, t_1]).$$

Avant de poursuivre, on va établir un résultat intermédiaire :

Lemme: $(\Gamma \circ \varphi)' = \Gamma' \circ \varphi \cdot \varphi'$.

Preuve du lemme : Soit $s \in J$, on a :

$$\begin{aligned} (\Gamma \circ \varphi)'(s) &= ((x \circ \varphi)'(s), (y \circ \varphi)'(s)) \\ &= (x'(\varphi(s))\varphi'(s), y'(\varphi(s))\varphi'(s)) \\ &= \varphi'(s) (x'(\varphi(s)), y'(\varphi(s))) \\ &= \varphi'(s) \Gamma'(\varphi(s)). \end{aligned}$$

▼

Revenons à présent à notre démonstration principale et considérons les deux fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} F(t) &:= \omega_{\Gamma(t)}(\Gamma'(t)) \\ \tilde{F}(s) &:= \omega_{\tilde{\Gamma}(s)}(\tilde{\Gamma}'(s)). \end{aligned}$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} \tilde{F}(s) &= \omega_{\Gamma(\varphi(s))}((\Gamma \circ \varphi)'(s)) \\ &= \omega_{\Gamma(\varphi(s))}((\Gamma'(\varphi(s))\varphi'(s))) \\ &= \varphi'(s) \omega_{\Gamma(\varphi(s))}(\Gamma'(\varphi(s))) \\ &= \varphi'(s) F(\varphi(s)) \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{\Gamma}} \omega &= \int_{s_0}^{s_1} \tilde{F}(s) ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} F(\varphi(s)) \varphi'(s) ds \\ &= \int_{s_0}^{s_1} F(\varphi(s)) \frac{dt}{ds} ds \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F(t) dt \\ &= \int_{\Gamma} \omega \end{aligned}$$

en effectuant le changement de variable $\varphi(s) = t$ dans l'intégrale de la seconde ligne. ■

Attention ! A partir de maintenant on pourra donc noter :

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \omega}$$

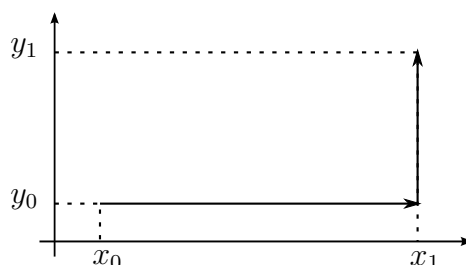
et ne plus spécifier désormais que le chemin \mathcal{C} et non son paramétrage Γ .

Supposons maintenant qu'un chemin régulier, noté \mathcal{C}_{MP} , ait pour extrémités les points M et P et soit N un point de \mathcal{C}_{MP} . Notons ensuite \mathcal{C}_{MN} la partie de \mathcal{C} reliant M à N et \mathcal{C}_{NP} la partie de \mathcal{C} reliant N à P . Il n'est pas trop difficile de montrer que l'on a alors la propriété d'additivité suivante :

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}_{MP}} \omega = \int_{\mathcal{C}_{MN}} \omega + \int_{\mathcal{C}_{NP}} \omega}$$

Cette dernière propriété permet de faciliter le calcul de l'intégrale d'une forme sur un chemin: nous pouvons ainsi choisir sur chaque morceau de notre chemin le paramétrage le plus adapté et le plus pratique. Nous allons voir cela dans l'exemple suivant.

Exemple Soit $\omega(x, y) = a(x, y) \mathbf{d}x + b(x, y) \mathbf{d}y$ une forme différentielle sur \mathbb{R}^2 et considérons le chemin régulier \mathcal{C} par morceaux suivant :



On choisit pour le morceau horizontal le paramétrage suivant :

$$\Gamma_0 : [x_0, x_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \Gamma_0(t) = (t, y_0)$$

et pour le morceau vertical :

$$\Gamma_1 : [y_0, y_1] \rightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \Gamma_1(t) = (x_1, t)$$

On calcule immédiatement leurs dérivées respectives:

$$\Gamma'_0(t) = (1, 0) \quad \Gamma'_1(t) = (0, 1).$$

On peut alors calculer :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \omega &= \int_{\Gamma_0} \omega + \int_{\Gamma_1} \omega \\
&= \int_{x_0}^{x_1} \omega_{\Gamma_0(t)} (\Gamma'_0(t)) dt + \int_{y_0}^{y_1} \omega_{\Gamma_1(t)} (\Gamma'_1(t)) dt \\
&= \int_{x_0}^{x_1} (a(t, y_0) \mathbf{dx} + b(t, y_0) \mathbf{dy})(1, 0) dt + \int_{y_0}^{y_1} (a(x_1, t) \mathbf{dx} + b(x_1, t) \mathbf{dy})(0, 1) dt \\
&= \int_{x_0}^{x_1} a(t, y_0) dt + \int_{y_0}^{y_1} b(x_1, t) dt
\end{aligned}$$

Examinons maintenant ce qu'il se passe lorsque l'on considère des courbes fermées :

Définition 1.8.7

- Un arc régulier par morceaux Γ sera dit **fermé** si ses extrémités sont confondues:

$$\Gamma(t_0) = \Gamma(t_n).$$

- Un chemin associé à un tel arc sera appelé un **laçet**.
-

Définition 1.8.8

Soit ω une forme différentielle à composantes continues sur U et \mathcal{C} un laçet dans U .

On notera :

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega := \int_{\mathcal{C}} \omega$$

l'intégrale de ω le long de \mathcal{C} et on l'appellera **circulation de ω le long du laçet \mathcal{C}** .

Passons à l'étude d'un cas important : celui où la forme ω est exacte. On suppose donc qu'il existe une fonction $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\omega = \mathbf{d}f$. Il vient alors :

$$\int_{\Gamma} \omega = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_1 + \cdots + \mathcal{I}_{n-1}$$

avec

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_k &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbf{d}f_{\Gamma(t)} (\Gamma'(t)) dt \\
&= \int_{t_k}^{t_{k+1}} (f \circ \Gamma)'(t) dt \\
&= [(f \circ \Gamma)(t)]_{t_k}^{t_{k+1}} \\
&= f(\Gamma(t_{k+1})) - f(\Gamma(t_k))
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} \omega &= f(\Gamma(t_1)) - f(\Gamma(t_0)) \\
 &\quad + f(\Gamma(t_2)) - f(\Gamma(t_1)) \\
 &\quad + f(\Gamma(t_3)) - f(\Gamma(t_2)) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + f(\Gamma(t_{n-1})) - f(\Gamma(t_{n-2})) \\
 &\quad + f(\Gamma(t_n)) - f(\Gamma(t_{n-1})) \\
 &= f(\Gamma(t_n)) - f(\Gamma(t_0)) \\
 &= f(N) - f(M).
 \end{aligned}$$

On vient donc d'établir le théorème suivant :

Théorème 1.8.9

Soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et \mathcal{C} un chemin régulier par morceaux joignant un point M à un point N dans la partie U . Alors:

$$\boxed{\int_{\mathcal{C}} \mathbf{d}f = f(N) - f(M)}.$$

Remarque

1. Ainsi, lorsque ω est une forme exacte, son intégrale le long de \mathcal{C} ne dépend que des extrémités de \mathcal{C} et non de sa "forme". Soit encore :

$$\omega \text{ exacte} \Rightarrow \int_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \omega$$

dès que les deux chemins \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ ont les mêmes extrémités.

2. La remarque précédente nous fournit ainsi, par contraposition, un moyen pratique pour montrer qu'une forme n'est pas exacte : il suffit de trouver deux chemins \mathcal{C} et $\tilde{\mathcal{C}}$ de mêmes extrémités et tels que :

$$\int_{\mathcal{C}} \omega \neq \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \omega$$

3. Ce théorème peut être considéré comme une généralisation à deux variables du théorème d'analyse suivant : si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et à dérivée continue, alors

$$\int_a^b h'(t) dt = h(b) - h(a).$$

Notons enfin un dernier corollaire important :

Corollaire 1.8.10

Si ω est exacte sur U et si \mathcal{C} est un lacet dans U , alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = 0.$$

Preuve:

$$\oint_{\mathcal{C}} \omega = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{d}f = f(N) - f(M) = 0.$$

puisque M et N sont confondus. ■

Remarque Là encore, on obtient une condition suffisante de non-exactitude : si on peut trouver un arc fermé Γ tel que la circulation de ω le long de Γ ne soit pas nulle, alors ω ne peut pas être exacte. Nous utiliserons cet outil pratique dans le prochain exemple.

Exemple On se place dans $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et on considère la forme différentielle ω sur U définie par

$$\omega_{(x,y)} = \frac{y}{x^2 + y^2} \mathbf{d}x - \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{d}y = \left[\frac{y}{x^2+y^2} \quad \frac{-x}{x^2+y^2} \right].$$

ω est fermée : en effet

$$\begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{1(x^2 + y^2) - y(2y)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial b}{\partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) \\ &= \frac{(-1)(x^2 + y^2) - (-x)(2x)}{(x^2 + y^2)^2} \\ &= \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

ω n'est pas exacte : considérons l'arc fermé suivant

$$\Gamma : [0, 2\pi] \rightarrow U : t \mapsto \Gamma(t) := (\cos(t), \sin(t)).$$

C'est bien un arc fermé dans U (il ne passe pas par l'origine) et le laçet associé est le cercle-unité. D'autre part, la dérivée en t est :

$$\Gamma'(t) = (-\sin(t), \cos(t)).$$

Calculons alors la circulation de ω le long de Γ :

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \mathbf{dx} + \frac{-\cos(t)}{\cos^2(t) + \sin^2(t)} \mathbf{dy} \right) (-\sin(t), \cos(t)) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} dt \\ &= -2\pi\end{aligned}$$

Comme la circulation de ω le long de l'arc fermé Γ n'est pas nulle, il s'ensuit (d'après le corollaire) que ω ne peut pas être exacte. Cet exemple nous montre donc qu'il existe des formes différentielles fermées qui ne sont pas exactes.