



SYLLABUS



Niveau d'étude : Licence 1
Semestre : 2

ECTS : 5

Cours : **Mathématiques 2**

CM : 30 heures

Enseignant : Alain BARRERE

TD : 30 heures

E-mail : alain.barrere@umontpellier.fr

Modalités de contrôle des connaissances : Contrôle continu (TD) + Examen écrit d'1h30 (CM)

Présentation et objectifs du cours

Ce cours prend place dans une séquence de cours de Mathématiques qui s'inscrivent dans le cursus d'un étudiant en économie. Pour l'essentiel, il prolonge et généralise les acquis du cours de « Mathématiques 1 » du 1^{er} semestre de Licence 1, et il prépare le cours de « Mathématiques » 3 de Licence 2.

Le plus gros de ce cours est consacré à **l'Analyse mathématique**, qu'on pourrait présenter comme le développement des notions et résultats fondamentaux du calcul infinitésimal : ses principes, utilisés en Economie, forgent la modélisation de base des comportements économiques, et sous-tendent les raisonnements formalisés.

Le cours de « Mathématiques 1 » était déjà entièrement consacré à l'Analyse, mais à la présentation de ses notions de base, et à leur application dans le seul cadre des fonctions réelles **d'une** variable réelle. Il reprenait en cela l'ensemble des connaissances acquises dans le secondaire, auxquelles il ajoutait quelques développements qui, pour certains des étudiants, pouvaient s'avérer nouveaux, suivant le type de Baccalauréat qu'ils ont obtenu (certains théorèmes sur les fonctions dérivables, notion de différentielle, formule de Taylor, éventuellement méthodes d'intégration...).

Le cours de « Mathématiques 2 », quant à lui, tout au moins pour sa part principale, porte sur les **fonctions réelles de plusieurs variables réelles** : c'est la généralisation aux fonctions à plusieurs variables des notions et des résultats présentés au semestre précédent – ou plutôt l'étude des fonctions d'une seule variable n'est-elle qu'un cas particulier de ce qui est présenté dans le cadre du cours de « Mathématiques 2 ».

Toute discipline se voulant « scientifique » cherche à repérer, formuler, valider des « lois », des relations fixes entre des phénomènes, ou tout au moins des régularités qui seraient, dans des conditions données, observables dans ces relations. Pour l'Economie comme pour d'autres disciplines, Physique, Biologie, mais aussi bien Sciences sociales et Sciences humaines, l'Analyse est parmi les disciplines mathématiques un thème privilégié, puisqu'elle permet d'étudier des relations fonctionnelles entre des variables, telles que la mesure de l'état de l'une, puisse permettre d'inférer l'état de celles qui en seraient « fonction ».

On conçoit que l'étude des phénomènes économiques, dont les déterminants sont nombreux, nombreuses les interactions avec d'autres phénomènes (économiques, ou non), et même à se ramener aux principaux d'entre ces déterminants - requiert très vite de considérer des fonctions de plusieurs variables. La plupart des théories économiques se trouvent ainsi présentées sous forme de modèles, dans lesquels des variables économiques sont *fonctionnellement* reliées entre elles.

L'étude des fonctions réelles de plusieurs variables réelles débouchera pour nous, entre autres résultats, sur des méthodes permettant de s'assurer de l'existence (ou non), et alors du nombre, et de la localisation, d'extremums éventuels des fonctions étudiées (maximums, minimums) ; ceci soit dans l'absolu, soit en faisant entrer par ailleurs en ligne de compte l'existence de liaisons entre les variables (l'économiste dirait des « contraintes »).

Ces méthodes constituent un appui à l'analyse économique, mais aussi à la détermination de ces situations « optimales » à la recherche, à la justification, à la caractérisation, à la mesure desquelles, s'adonne éventuellement l'économiste. Tenant d'une discipline dont la pratique peut être tour à tour celle d'une science positive, attachée à identifier et à caractériser les faits et leurs relations ; mais aussi celle d'une science normative, prétendant se prononcer sur ce qui pourrait être jugé « bon » ; mais aussi celle d'un art, visant alors à éclairer et à réunir les conditions d'obtention d'un tel résultat – l'économiste est appelé mettre en évidence les conditions dans lesquelles un objectif dont l'obtention est jugée souhaitable pourrait se voir atteint, afin qu'elles puissent être analysées, discutées, voire mises en œuvre.

La recherche d'une situation « optimale » suppose d'abord la définition et la discussion de cette optimalité, de sa nature, de son principe, et des critères auxquels on la reconnaîtra. Mais il s'avère que bien souvent, l'optimisation peut se résumer à n'être qu'une « extrémisation » - et l'optimum, un extremum. On s'attache alors à rechercher, le ou les minimums, par exemple d'une fonction de coût, le ou les maximums, par exemple d'une fonction de chiffre d'affaires, ou de profit, ou d'utilité, ou de bien-être... - et à comparer entre elles les conditions associées par ailleurs aux extremums identifiés.

(Les méthodes de recherche d'extremums de fonctions sous des contraintes en forme d'égalité, auxquelles on procède dans ce cours, ne sont que le premier maillon d'une série de techniques progressivement présentées au long du cursus de Licence, et de Master.

L'année suivante, en Licence 2, le cours de Mathématiques 3 est consacré à l'algèbre linéaire. Il y a des liens entre tous les compartiments disciplinaires des Mathématiques, notamment entre l'Analyse et l'Algèbre. Ainsi cette même problématique de la recherche d'extremums d'une fonction de plusieurs variables sous des contraintes d'égalité sera reprise, et l'utilisation des méthodes acquises en Licence 1 systématisée dans le cadre de l'emploi du calcul matriciel, qui permettra de traiter facilement le cas de fonctions de nombreuses variables, et de formaliser par suite informatiquement ce traitement. Sera introduite en outre la recherche d'extremums sous des contraintes en forme d'inégalités, ou encore d'un « mix » de contraintes en forme d'égalités, et d'inégalités.

Par suite, et au fur et à mesure du cursus, seront présentées les principales techniques, ou les plus courantes, ou les plus accessibles mathématiquement, de cette branche de la discipline qu'on appelle « programmation mathématique », et qui consiste à rechercher l'optimum s'il existe d'un « programme », c'est-à-dire les caractéristiques de l'extremum correspondant d'une fonction « objectif » qu'il s'agirait de maximiser (ou de minimiser) sous des contraintes, voire éventuellement les caractéristiques de la situation qui se rapprocherait le plus d'un optimum potentiel. Ces méthodes, ou leur portée, varient suivant la forme de l'ensemble des solutions possibles, et la nature mathématique de la fonction objectif et celle des contraintes. Elles constituent, dans le cadre de validité de leur emploi, un appui considérable au calcul économique.)

Enfin, entre le cours de « Mathématiques 1 », entièrement dédié aux fonctions réelles d'une variable réelle, et le cours de « Mathématiques 3 », entièrement dédié à l'algèbre linéaire - le volume horaire et la disposition des masses permettent, au-delà de l'étude des fonctions de plusieurs variables, d'introduire dans le cadre de ce cours de « Mathématiques 2 » d'autres thèmes jugés d'utilité pour les économistes, qu'on n'aurait pas le loisir de traiter ailleurs, et qui donnent du coup au programme de « Mathématiques 2 » une allure composite :

◇ **L'étude des fonctions trigonométriques, et celle des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques** (on revient, ici, à des fonctions d'une variable)

◇ **Le rappel des principales caractéristiques des suites numériques, et leur utilisation dans le cadre de la présentation des bases des calculs financiers**

Le premier de ces thèmes sert à diverses utilisations, en économie, et en statistiques. Le second donnera lieu à des développements poussés en Master 1, dans le cadre d'un cours spécialisé de Mathématiques financières, mais ses concepts et ses méthodes peuvent servir entre-temps à la réflexion en analyse économique, ou encore donner lieu à diverses applications en gestion, en comptabilité, en analyse financière, en évaluation financière, en évaluation économique.

Démarche et caractéristiques du cours, objectifs, exigences

A- Le cours est un cours de Mathématiques conçu pour des économistes, dont le rapport aux Mathématiques est surtout utilitariste, et la conception qu'ils en ont, essentiellement instrumentale : un outil dont se servir. C'est dire que le cours ne ressemblera pas à un cours de Mathématiques pour mathématiciens, non seulement dans les choix de détail opérés, mais déjà dans l'ordre de présentation des notions, qui intéresseront plus pour leur nature, et leur utilisation, que pour leur genèse ou leur construction.

B- Cependant, loin d'un catalogue de recettes ou de techniques, l'objectif est la compréhension intime des notions présentées, dans la mesure où elles sont à la base de la présentation formalisée, voire éventuellement de l'exercice même des raisonnements, dans la réflexion économique. Cette compréhension est appuyée par des exercices permettant de mettre ces notions en situation, de les faire réagir en présence d'autres objets mathématiques (exercices commentés en TD, ou donnant lieu, thème après thème, à des distributions de documents d'exercices corrigés).

C- Il sera donc attendu que les étudiants, au travers du cours, des TD, et d'un exercice personnel constant indispensable au-delà, soient de fait capables de résoudre correctement, complètement, exactement, en temps limité, et en justifiant le déroulement de leur traitement, des exercices mathématiques (bien sûr spécifiquement choisis, pour l'utilité pour l'économiste, des notions ou des modalités de traitement qu'ils supposent). C'est donc à ce type d'épreuves qu'ils doivent se préparer.

D- Certes, autant qu'il sera possible, des évocations ou des développements seront faits en cours ou en TD, pour évoquer le lien de ce qui s'y fait avec tel ou tel aspect du programme parallèle en économie (microéconomie en particulier), et donner à voir que les présentations faites ne sont pas pure gratuité (justification mathématique de la forme des courbes d'indifférence mises en avant dans les théories néo-classiques du producteur ou du consommateur, application et conséquences de l'homogénéité relatives à l'usage de fonctions de production homogènes, etc...). Pour autant, cela n'exonère en rien de la maîtrise et du bon usage de la mathématique : la nature même des épreuves implique que c'est de ces derniers que les étudiants auront à rendre compte.

E- Enfin, à côté de son intérêt cognitif, et de son intérêt instrumental, voire de la puissance de calcul que permettent ses algorithmes, qui sont surtout ce que nous allons retenir pour notre compte de tout ce que peuvent par ailleurs apporter les Mathématiques, nous n'oublierons pas qu'un bénéfice de la formation à, et par, les Mathématiques est l'apprentissage, et l'exercice, de la rigueur logique et de l'exactitude. Langage dont tous les termes sont définis sans ambiguïté, il permet de formuler des raisonnements avec une précision, et une économie de signes, sans équivalent. Cela participe de sa beauté, et de son utilité, spécifiques. Une exigence particulière portera donc sur l'explicitation complète et constante du propos, la précision de l'expression, l'exactitude des notations.

(N-B : La même rigueur est évidemment tout aussi nécessaire dans des raisonnements verbalisés, et dans l'usage du français – par exemple dans un exercice comme la dissertation, économique, historique, ou autre : à ceci près qu'alors la précision et l'exactitude nécessaires de la pensée et de sa formulation doivent (et pas au détriment de la clarté) s'exercer à partir de mots, dont il n'y a pas un seul qui ne soit ambigu – et, surtout, parmi eux, les mots importants : c'est ce qui participe de la beauté, de la souplesse, et de l'utilité, spécifiques à cet autre langage...)

Pré-requis

◇ La totalité des pré-requis indispensables, en algèbre comme en analyse, pour entreprendre des études en économie, est rassemblée d'une façon particulièrement accessible dans sa formulation, pédagogique, et sans rien le céder à l'exactitude des énoncés et des résultats, dans l'ouvrage de Jean-Louis SOL cité ci-dessous dans les indications bibliographiques.

◇ La maîtrise totale des notions du cours de « Mathématiques 1 », du semestre 1 de L 1, lui-même assorti de TD, qui reprend bon nombre des notions présentées dans l'ouvrage précité, mais pas toutes, et qui y ajoute certains développements, est un pré-requis indispensable, ces mêmes notions se voyant appliquées d'emblée à de nouveaux objets.

Contenu

Partie I : Les fonctions numériques de plusieurs variables réelles

Généralités sur les fonctions numériques de plusieurs variables réelles

- ◇ Présentation de l'ensemble \mathbb{R}^n
- ◇ Éléments de topologie de \mathbb{R}^n
- ◇ Définition des fonctions de plusieurs variables
- ◇ Limites, et continuité des fonctions de plusieurs variables
- ◇ Courbes de niveau
- ◇ Fonctions homogènes

Dérivées partielles et différentielle

- ◇ Dérivées des fonctions composées
- ◇ Théorème d'Euler
- ◇ Formule de Taylor
- ◇ Différentielle
- ◇ Intégration d'une différentielle

Fonctions implicites

- ◇ Théorème d'existence
- ◇ Dérivées des fonctions implicites

Extremums des fonctions numériques de plusieurs variables réelles

- ◇ Définition des extremums libres, et des extremums liés
- ◇ Recherche des extremums libres
- ◇ Recherche des extremums liés par des contraintes en forme d'égalités

Partie II : Les fonctions trigonométriques et les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

Présentation

- ◇ Définitions
- ◇ Le cercle trigonométrique
- ◇ Quelques relations trigonométriques

Etude des fonctions circulaires (ou trigonométriques)

- ◇ Les fonctions sinus, cosinus, tangente, cotangente

Etude des fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

- ◇ Les fonctions réciproques des fonctions trigonométriques
- ◇ Les fonctions « Arc » : étude des fonctions Arc sinus, Arc cosinus, Arc tangente, Arc cotangente

Partie III : Calculs financiers

Rappels sur les suites de nombres

- ◇ Définitions et caractéristiques
- ◇ Suites arithmétiques et suites géométriques : définitions, expression du terme général, somme de termes consécutifs

Notions de calculs financiers

- ◇ Définitions
- ◇ Les intérêts simples
- ◇ Les intérêts composés
- ◇ Taux proportionnels
- ◇ Taux équivalents
- ◇ Capitalisation et actualisation
- ◇ Cas où le nombre de périodes n'est pas entier

Éléments bibliographiques

- ◇ ARCHINARD et GUERRIEN, Principes mathématiques pour économistes (Editions Economica)
- ◇ PLANCHE, Mathématiques pour économistes – Analyse (Editions Dunod)
- ◇ PLANCHE, Mathématiques pour économistes – Algèbre (Editions Dunod)
- ◇ PRADEL et BOUZITAT, Mathématiques – Fonctions de plusieurs variables (Editions Cujas)
- ◇ SOL, Mathématiques – Accès à l'université (Editions Dunod)
- ◇ BONNEAU, Mathématiques financières (Editions Dunod)
- ◇ CHABRIOL, Mathématiques commerciales et financières – actualisation (Editions Foucher)