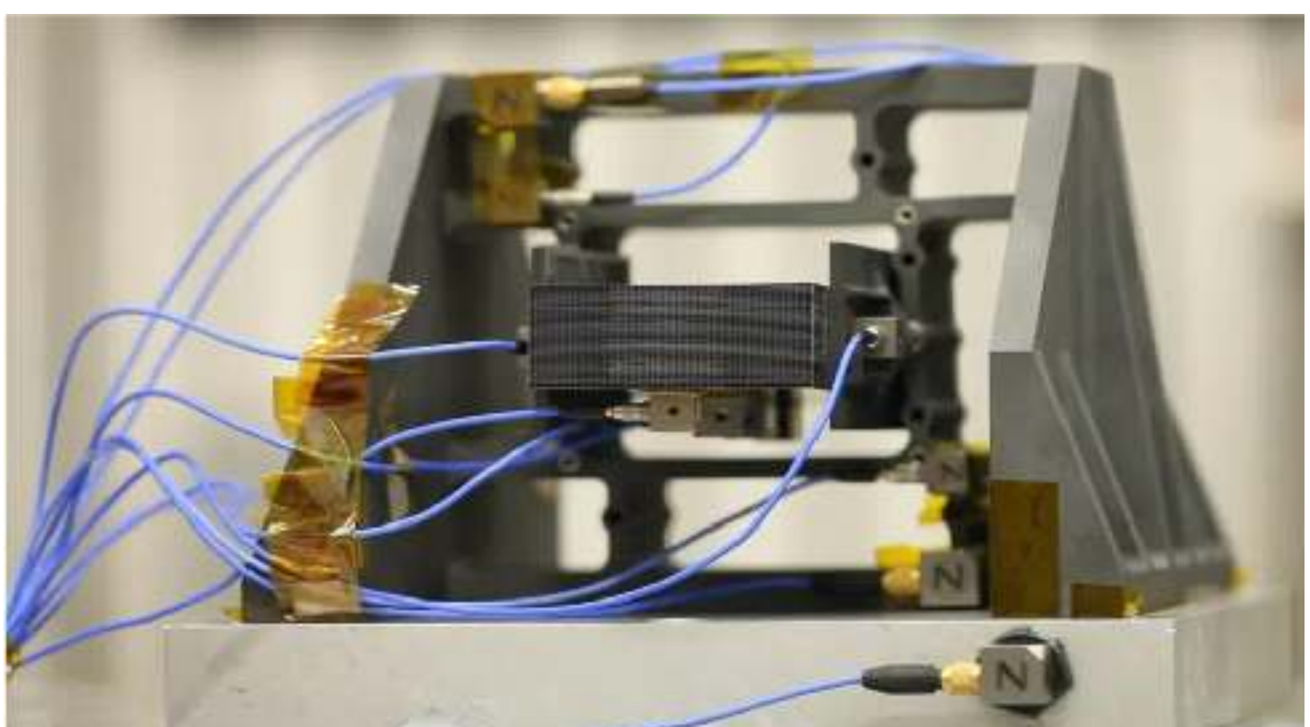
LP AIT - UE 3 - Tests d’environnement

Essais en vibrations

J. Averseng - J.F. Dubé



Objectifs

- **Mener un essai vibratoire**:
  - de caractérisation
  - de type « qualification »

- **Outils :**
  - Savoir modéliser une structure simple et simuler sa réponse sous environnement vibratoire
  - Analyser et comprendre une spécification d'essai vibratoire

Organisation

2 x 3h CM/TD

2 x 3h de TP

Evaluation : rapports de TP

Plan

1. **Introduction - contexte spatial (ECSS) - essais vibratoires**
2. **Eléments de dynamique des structures**
   - système masse ressort 1 ddl
   - vibrations libres & forcées, amortissement
   - cas n-ddl (MEF) —> notion de transfert FRF
3. **Mesures dynamiques**
   - chaine de mesure : forces, accélérations, capteurs, conditionnement
   - excitations : pot vibrant, choc (marteau)
   - traitement de signaux
4. **TP : caractérisation + reproduction d'un environnement vibratoire**
   - sinus balayé
   - aléatoire
   - choc

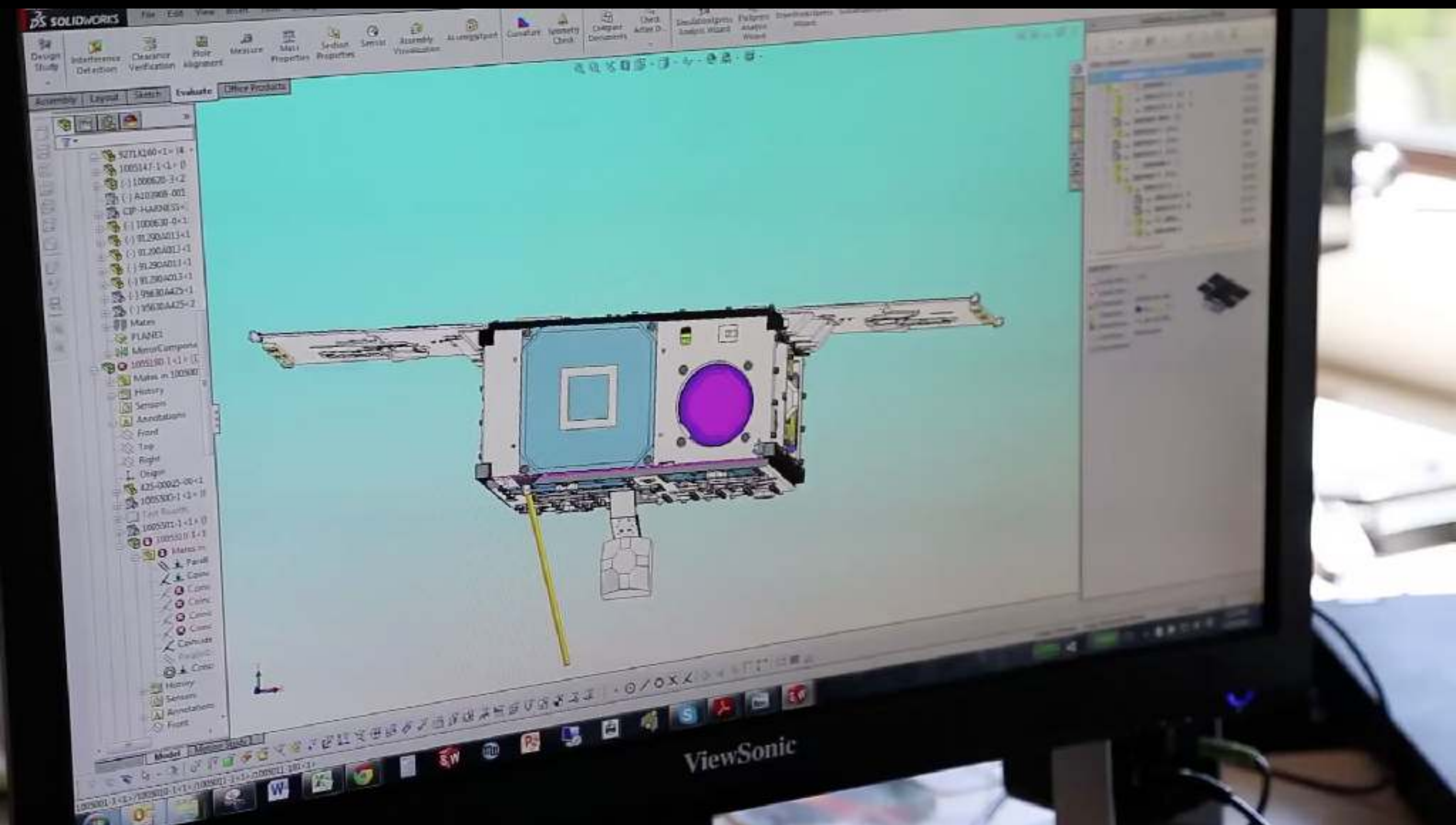
Travaux dirigés

- **TD1** - Système 1 puis 2 DDL : fréquences propres, modes (équation, scilab), amortissement, constitution modèle FRF
- **TD2** - Calcul de réponse à partir d’un modèle FRF pour différents signaux :
  - sinus forcé-> amplitude, déphasage
  - choc (dirac, demi-sinus…)
  - bruit uniforme, filtré (BF, HF, large bande…)
- **TD3** - Calcul de formes modales à partir de 6 FRF AZ/AZ (anneau comat)
- **TD4** - Traitement signal temporel scilab -> niveau RMS (sinus, bruit), spectre, PSD, autocorrelation, cross-correlation, calcul FRF, fit —> modèle FRF
- **TD5** - ECSS -> exigence PSD -> paramétrage excitation et chaîne de mesure (gain capteur, ampli)

Travaux pratiques

1. **Analyse modale** d'une structure avec pot vibrant
    - Matériel : pot 60 N + table vibrante + générateur WF + 2 accéléromètres + scilab
    - Calcul modes système 2 DDL (résultat TD)
    - Appropriation de modes en sinus + mesure accélération (temporel + RMS) + traitement FFT scilab
    - Excitation random -> mesure —> traitement FFT scilab —> FRF (mean)
2. **Analyse modale** par marteau choc
    - Matériel : PC + OROS + 1 accéléromètre IEPE + 1 marteau choc
    - sur carte électronique retournée
    - mesure FRF en différents points : 12
    - choix de 2 pics -> reconstitution forme modale
    - variation conditions limites + composants —> 4 configurations
3. **Essai caractérisation** + « **qualification »** sur maquette nanosat
    - Pot tiravib 200 N + HP 3562A + 2 accéléromètres
    - Mesures FRF en différents points
        - balayage sinus : global + zooms sur pics
        - aléatoire lin-spec : global
    - Essais « qualif » aléatoire + calcul niveau pour imposer PSD constante en entrée sur 100-400 Hz

Cours

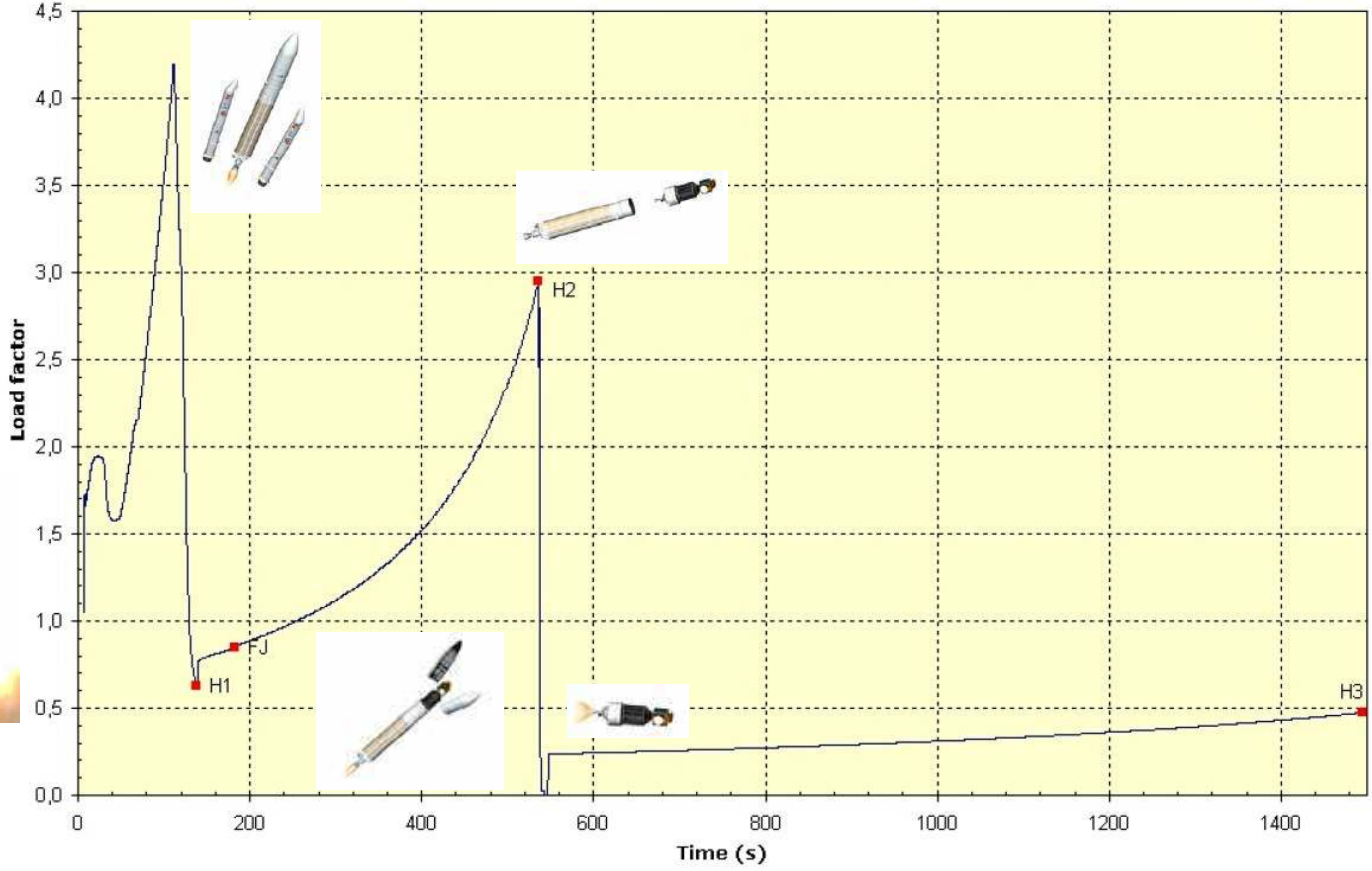

SOLIDWORKS
Interference Detection
Clearance Verification
Hole Alignment
Measure
Mass Properties
Section Properties
Sensor
Assembly Visualization
Curvature
Symmetry Check
Compare Documents
Assembly
Layout
Sketch
Evaluate
Office Products
Mates
History
Sensors
Annotations
Front
Top
Right
Origin
Model
ViewSonic

1.Introduction

Chaque événement de la vie d'un engin spatial introduit des **charges structurelles :**

- Transport
- Surpression démarrage moteurs
- Décollage
- Bruits moteurs + vibration induites dans la structure
- Changements de régime (MECO…)
- Instabilité Pogo (PrOpulsion Generated Oscillations)
- Bruits aérodynamiques
- Mouvements de fluides dans les réservoirs
- Séparation des étages et de la coiffe
- Chocs pyrotechniques
- Charges induites par les manoeuvres
- Opérations de vol, des équipements

Ariane 5 - d'accélération longitudinale - niveaux typiques



1.Introduction

Le défi consiste à identifier les événements qui peuvent être critiques, à **prévoir les charges** causées par chacune des sources de charges indépendantes pour ces événements, puis à combiner les charges prévues de manière appropriée **pour la conception**.

Les charges structurelles dépendent d'**environnements complexes et aléatoires** et des conceptions de l'engin spatial et du lanceur. Les charges prévues utilisées pour la conception dépendent de la qualité de la **simulation mathématique des environnements** et **du modèle de structure**.

1.Introduction

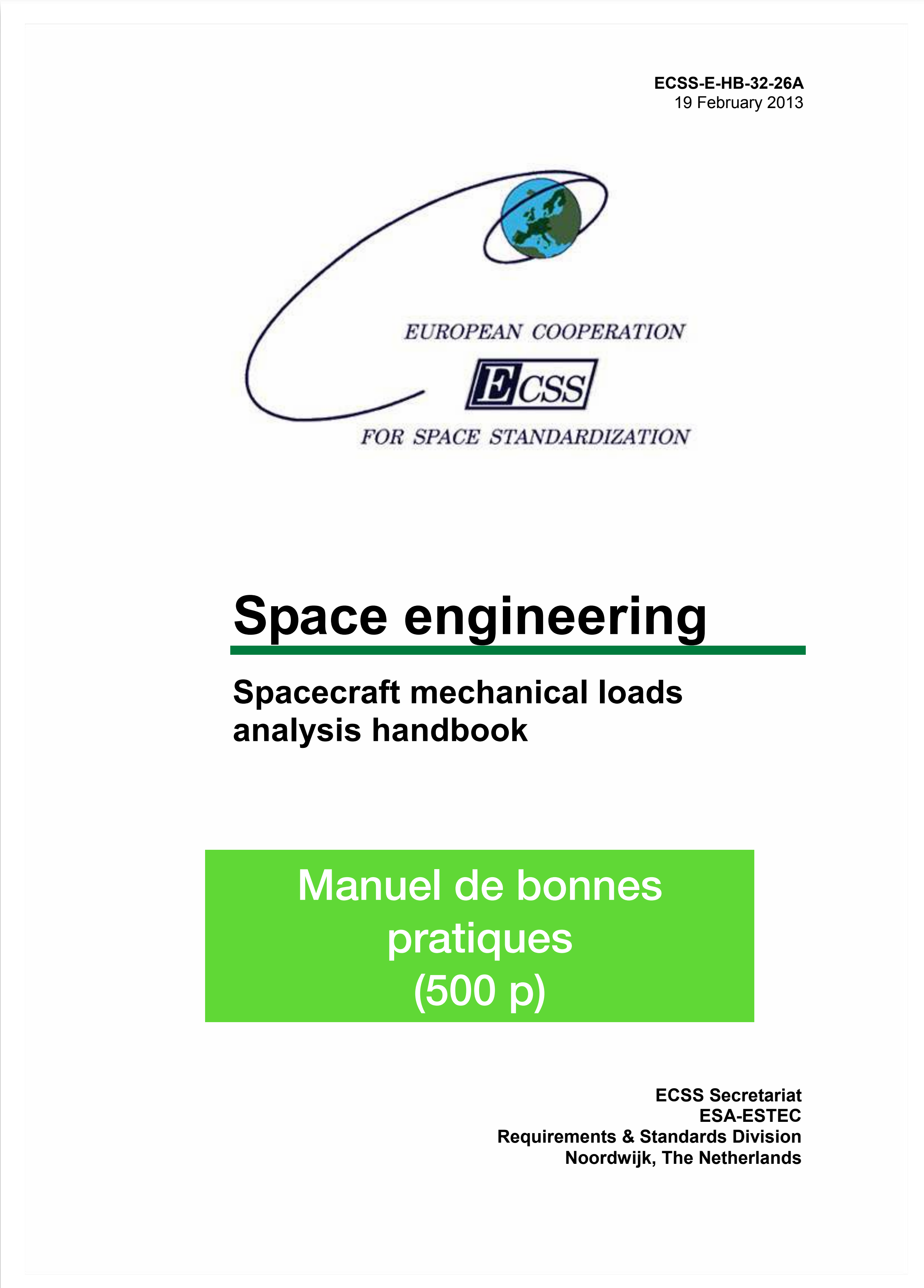
L’analyse des charges est doublement importante car c’est la base des **charges d’essai** statiques et sinusoïdales utilisées pour **vérifier la résistance des structures** primaires et de nombreuses structures secondaires.

D'autre part, la **prévision des réponses** est importante non seulement pour évaluer la capacité de la structure à survivre, mais également pour fournir des **environnements de conception et de test** ainsi que des exigences pour les unités et les sous-systèmes.

1.Introduction

En résumé, il s'agit de pouvoir :

- **Définir un environnement mécanique** par l'analyse des charges :
    - couplages lanceur/plateforme
    - vibrations aléatoires, vibroacoustique
    - simulation de tests (ex : balayage sinus = FRF)
    - …
- **Identifier une structure**, par analyse et tests :
    - analyse modale (calcul de fréquences, modes propres,…)
    - recherche de modes/analyse modale expérimentale
    - mise à jour de paramètres de modèles et validation
- **Evaluer les résultats de test** de qualification et d'acceptabilité (sinus, aléatoire, bruit aérien, choc)



ECSS-E-HB-32-26A
19 February 2013

EUROPEAN COOPERATION
ECSS
FOR SPACE STANDARDIZATION

Space engineering

Spacecraft mechanical loads analysis handbook

Manuel de bonnes pratiques
(500 p)

ECSS Secretariat
ESA-ESTEC
Requirements & Standards Division
Noordwijk, The Netherlands

ECSS-E-10-03A
15 February 2002

EUROPEAN COOPERATION
ECSS
FOR SPACE STANDARDIZATION

Space engineering

Testing

Norme : définitions des exigences, niveaux, etc..
(160 p)

ECSS Secretariat
ESA-ESTEC
Requirements & Standards Division
Noordwijk, The Netherlands

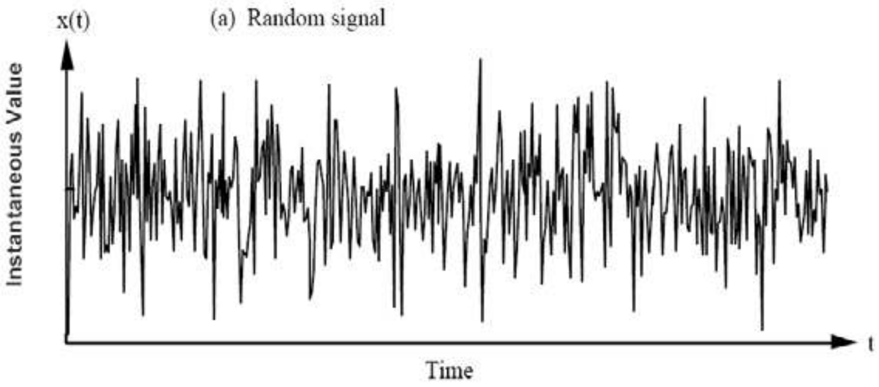
1.Introduction

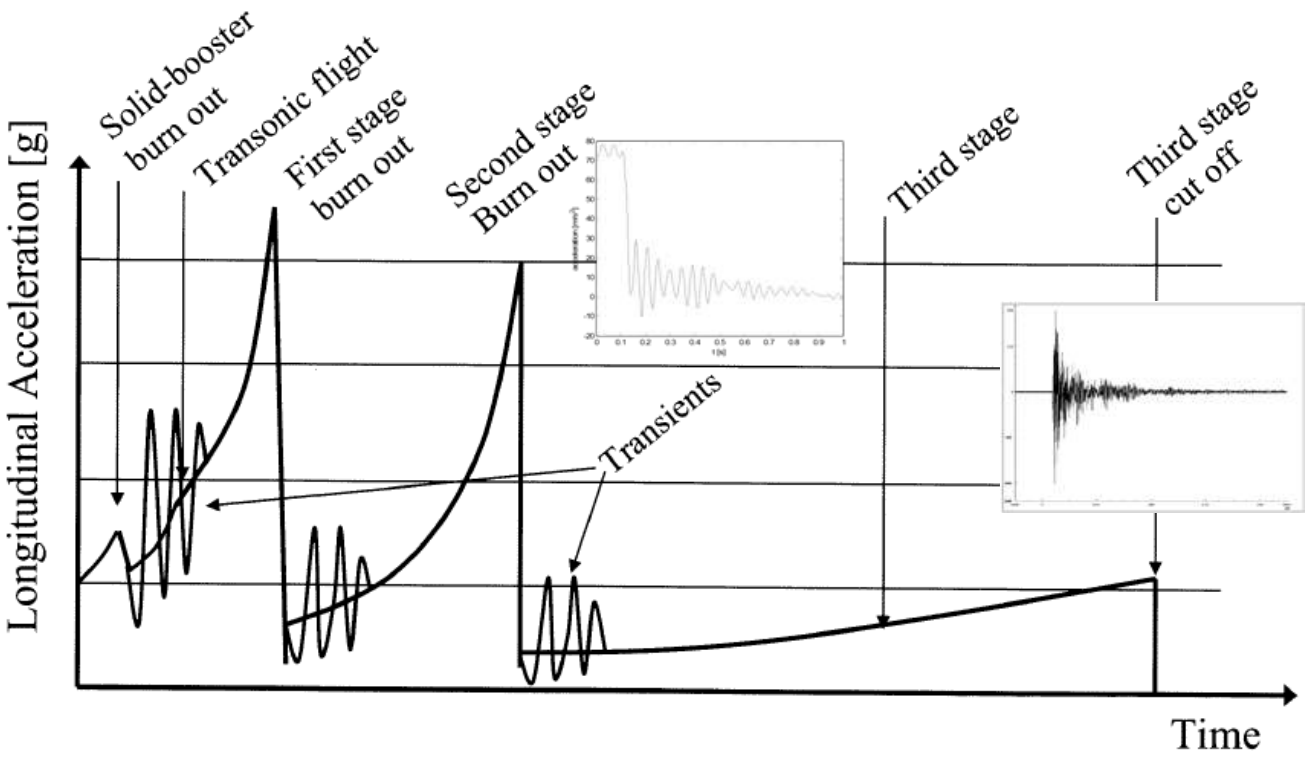
Les environnements mécaniques à considérer :

- **Accélérations** typiques (quasi-statique)
- **Vibrations**
  - Basses-fréquence (transmises via l'interface avec le lanceur)
  - Large bande
    - Aléatoires
    - Acoustique
- **Chocs**

Les outils :

- dynamique des structures
- mesures expérimentales



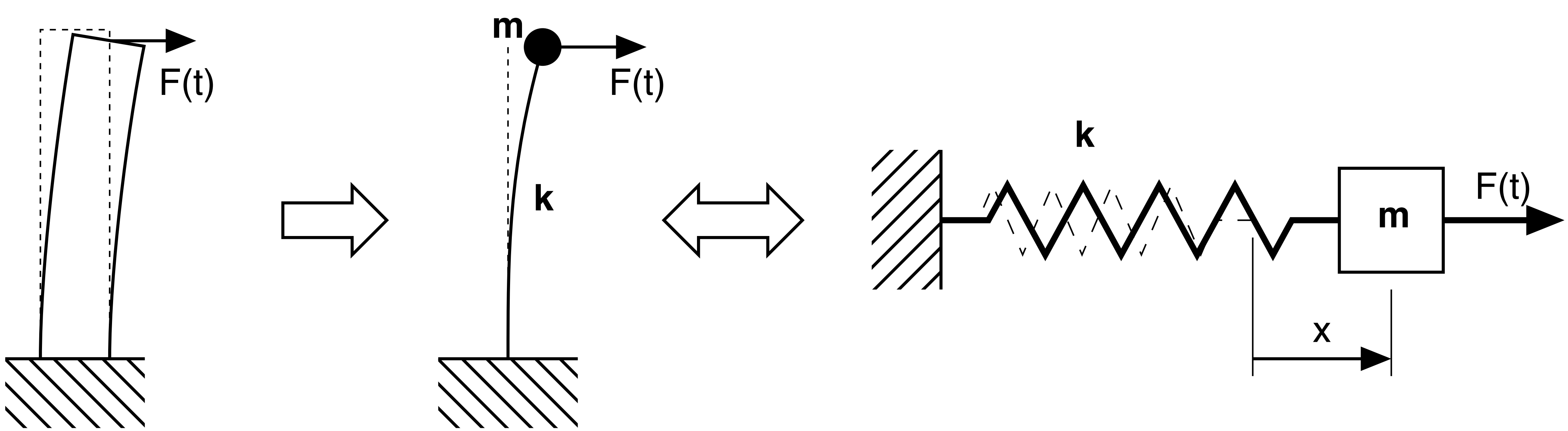


2. Eléments de dynamique des structures

2.Eléments de dynamique des structures

2.1.Système 1 ddl

Modélisation :



k : raideur ($N.m^{-1}$)
m : masse (kg)
Le mouvement est considéré à partir de la position d'équilibre stable : $x = 0$

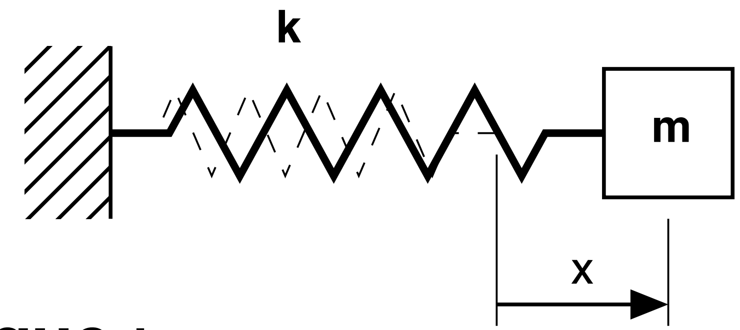
  $F(t) = 0$ —> mouvement libre

  $F(t) \neq 0$ —> régime forcé

2.Eléments de dynamique des structures

2.1.Système 1 ddl - vibrations libre

Le système est libre : F(t) = 0



Application du **Principe Fondamental de la Dynamique** :

On isole la masse m :

Elle est soumise à la force de rappel : $\overrightarrow{F_k} = -k\overrightarrow{x}$

Application du PFD :

$$\overrightarrow{F_k} = m\ddot{x}\overrightarrow{x}$$

Projection sur $\overrightarrow{x}$:

$$-kx = m\ddot{x}$$

soit :

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.1.Système 1 ddl - vibrations libre

Equation du mouvement :

$m\ddot{x} + kx = 0$ est une équation différentielle du 2nd ordre

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la **pulsation propre** de l'oscillateur (rad/s)

Les solutions sont de la forme Ae^{rt} d'où :

$$mr^2Ae^{rt} + kAe^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad mr^2 + k = 0$$

$$\text{soit } r^2 + \omega_0^2 = 0 \text{ avec pour solution } r = \pm i\omega_0$$

Les solutions sont ainsi :

$$x(t) = A_1e^{i\omega_0 t} + B_1e^{-i\omega_0 t} = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \phi)$$

où les constantes A_1, B_1 ou A, B ou C et ϕ sont déterminées à partir de conditions initiales

2.Eléments de dynamique des structures

2.1.Système 1 ddl - vibrations libre

Exemple :

à t = 0 on lâche l'oscillateur d'un position écartée de sa position d'équilibre ($x \neq 0$) :

$x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = 0$

Comme x(t) est de la forme $A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

On a donc :

$$x(0) = A = x_0 \text{ et } \dot{x}(0) = B = 0$$

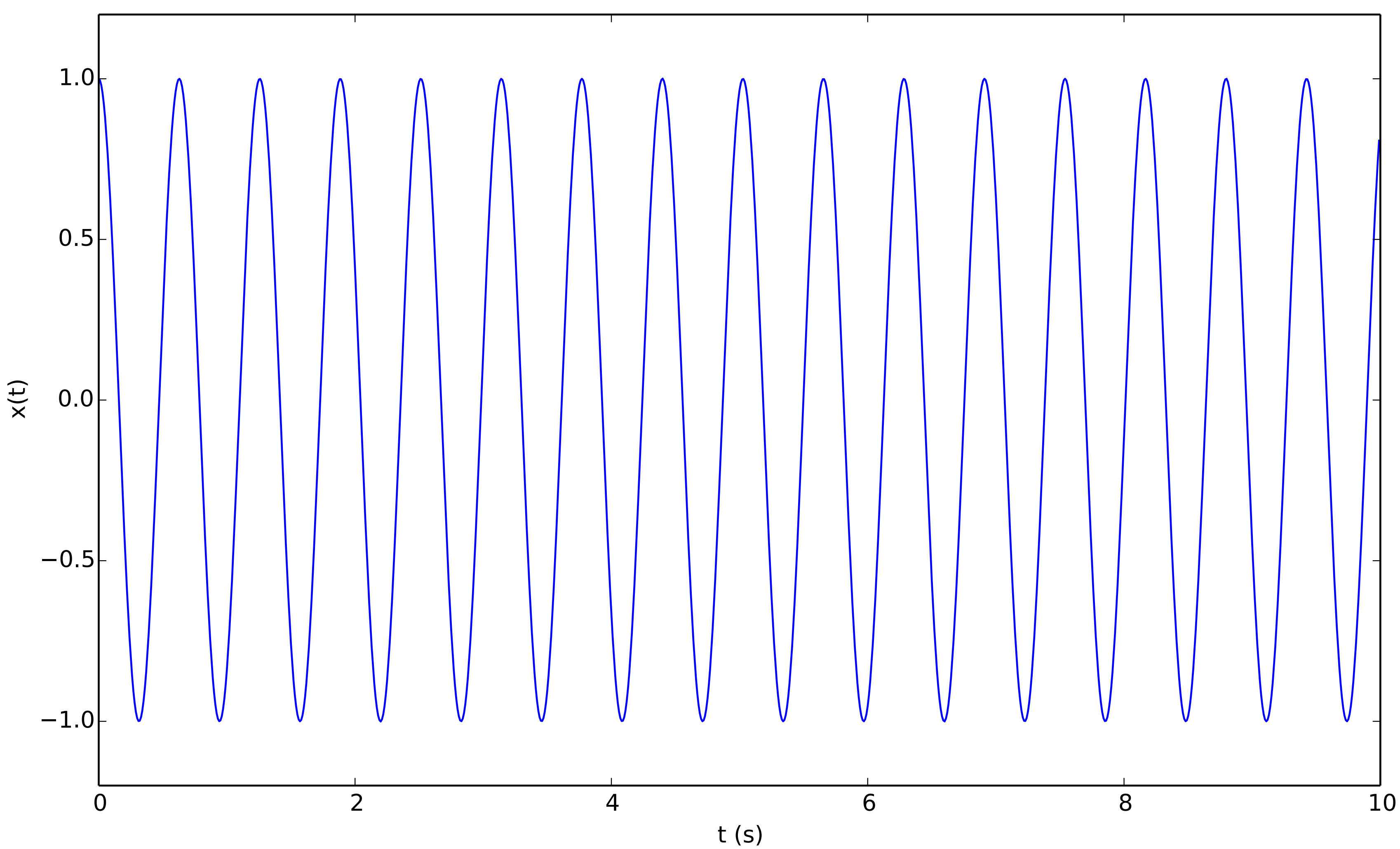
D'où :

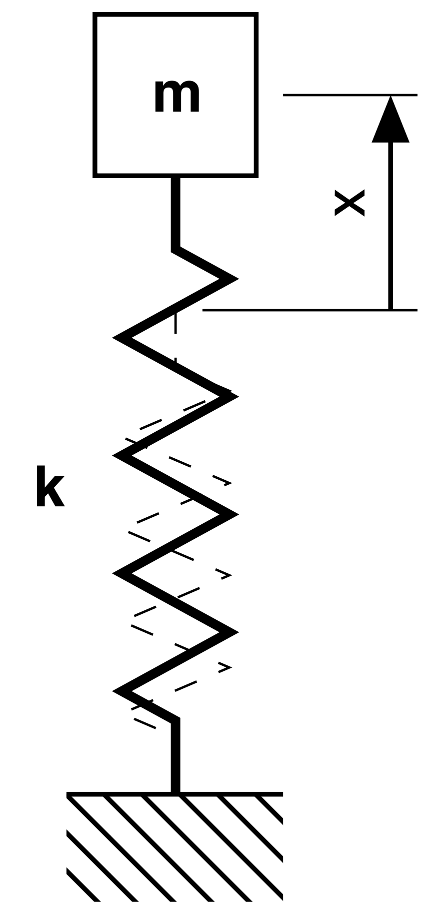
$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.1.Système 1 ddl - vibrations libre

Exemple : (m = 1 kg, k = 100 N/m, w_0 = 10 rad/s, f_0 = 1,59 Hz, x_0 = 1m, x'_0 = 0)

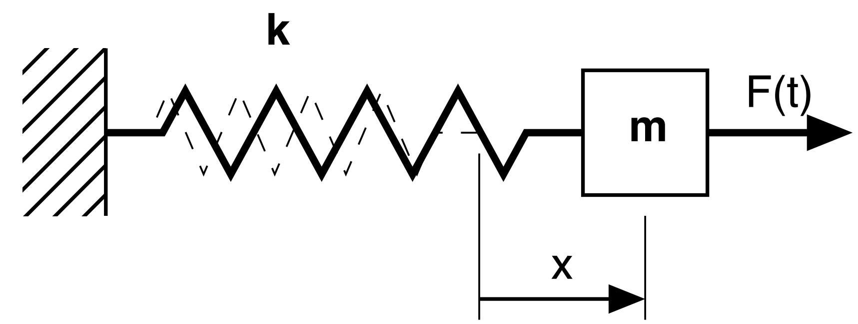




2.Eléments de dynamique des structures

2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées

Le systèmes est forcé : $F(t) \neq 0$



On peut utiliser le PFD ou les équations de Lagrange pour obtenir :

$$m\ddot{x}+k\,x=f(t) \quad ou \quad \ddot{x}+\frac{k}{m}x=\frac{f(t)}{m}$$

La solution de cette équation différentielle se décompose en deux parties :

- la solution générale, x_g, solution de $m\ddot{x}_g+k\,x_g=0$
- la solution particulière, x_p, solution de $m\ddot{x}_p+k\,x_p=f(t)$

2.Eléments de dynamique des structures

2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées

Utilisation des résultats généraux et les méthodes classiques de résolution des éq. diff. ou des transformées de Laplace

On déjà $x_g(t) = A\cos(\omega_0\, t) + B\sin(\omega_0\, t)\ avec\ \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

a) <u>Méthode classique (variation de la constante)</u>

On suppose que $x_p(t) = X_1(t)\cos(\omega_0 t) + X_2(t)\sin(\omega_0 t)$

$$et\ \dot{X}_1(t)\cos(\omega_0 t) + \dot{X}_2(t)\sin(\omega_0 t) = 0$$

alors $\ddot{x}_p = -\omega_0^2\left(X_1(t)\cos(\omega_0 t) + X_2(t)\sin(\omega_0 t)\right)$

$$+\omega_0\left(-\dot{X}_1(t)\sin(\omega_0 t) + \dot{X}_2(t)\cos(\omega_0 t)\right)$$

en reportant dans l'eq. diff. on obtient :

$$\begin{cases} \omega_0\left(-\dot{X}_1(t)\sin(\omega_0\, t) + \dot{X}_2(t)\cos(\omega_0\, t)\right) = \dfrac{f(t)}{m} \\ \dot{X}_1(t)\cos(\omega_0\, t) + \dot{X}_2(t)\sin(\omega_0\, t) = 0 \end{cases}$$

2.Eléments de dynamique des structures
2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées

En combinant les 2 équations on a :

$$\begin{cases} \dot{X}_1(t) = \dfrac{-f(t)}{m\omega_0}\sin(\omega_0 t) \\ \dot{X}_2(t) = \dfrac{f(t)}{m\omega_0}\cos(\omega_0 t) \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} X_1(t) = \dfrac{-1}{m\omega_0}\displaystyle\int_0^t f(\tau)\sin(\omega_0 \tau)\,d\tau \\ X_2(t) = \dfrac{1}{m\omega_0}\displaystyle\int_0^t f(\tau)\cos(\omega_0 \tau)\,d\tau \end{cases}$$

D'où

$$x_p(t) = \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t f(\tau)\Big[\underbrace{\cos(\omega_0 \tau)\sin(\omega_0 t) - \sin(\omega_0 \tau)\cos(\omega_0 t)}_{\sin\omega_0(t-\tau)}\Big]d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t) &= x_g(t) + x_p(t) \\ &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t + \frac{1}{m\omega_0}\int_0^t f(t)\sin\omega_0(t-\tau)\,d\tau \end{aligned}$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées

b) <u>Transformée de Laplace</u>

Rappels : *on pose* $\mathcal{L}\left[f(t)\right]=F(p)=\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt$ *avec* $p\in\mathbb{C}$

<u>Propriétés :</u>

linéarité de la transformation $\left[a\,f(t)+b\,g(t)\right]=a\left[f(t)\right]+b\left[g(t)\right]$

dérivation
$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=\int_0^\infty \frac{df(t)}{dt}\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\left[f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\right]_0^\infty+p\int_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt$$
$$=-f(0^{plus})+p\,\mathcal{L}\left[df(t)\right]$$
$$\mathcal{L}\left[\frac{d^{2f}(t)}{dt^2}\right]=p^2\,\mathcal{L}\left[df(t)\right]-p\,f(0)-\frac{df(0)}{dt}$$

retard (τ>0)
$$\left[f(t-\tau)\right]=\int_0^\infty f(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt=\int_{-\tau}^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-p(u+\tau)}\,du$$
$$=\mathrm{e}^{-p\tau}\int_{-\tau}^\infty f(u)\,\mathrm{e}^{-pu}\,du=\mathrm{e}^{-p\tau}\left[f(t)\right]$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées

amortissement (a>0)

$$\mathcal{L}\left[\mathrm{e}^{-at} f(t)\right] = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-at} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt = F(p+a)$$

changement d'échelle (a>0)

$$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = \int_0^\infty f\left(\frac{t}{a}\right)\mathrm{e}^{-pt}\,dt = F(a\,p)$$

convolution

$$\mathcal{L}\left[f(t)\circ g(t)\right] = \int_0^\infty \left[\int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau\right]\mathrm{e}^{-pt}\,dt$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t f(\tau)\,\mathrm{e}^{-pt}\,g(t-\tau)\,\mathrm{e}^{-p(t-\tau)}\,d\tau\,dt$$

$$= \mathcal{L}\left[f(t)\right]\mathcal{L}\left[g(t)\right] = F(p)\,G(p)$$

sin(ωt)

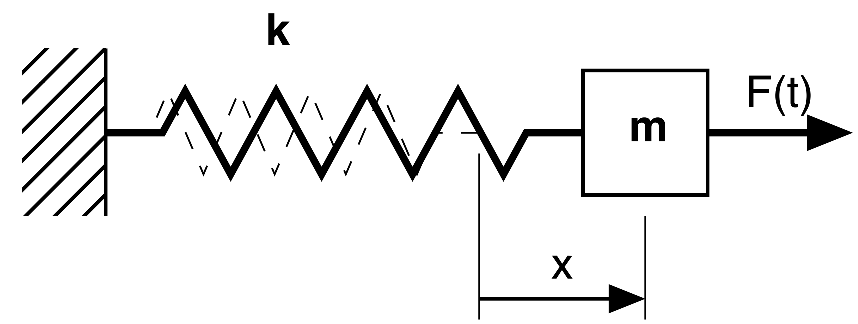
$$\mathcal{L}(\sin\omega t) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$$

cos(ωt)

$$\mathcal{L}(\cos\omega t) = \frac{p}{p^2+\omega^2}$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées



Application au problème des oscillations forcées

$$(x) = X(p)$$

$$(\ddot{x}) = p^2 X(p) - p\,x(0) - \dot{x}(0)$$

$$(f(t)) = F(p)$$

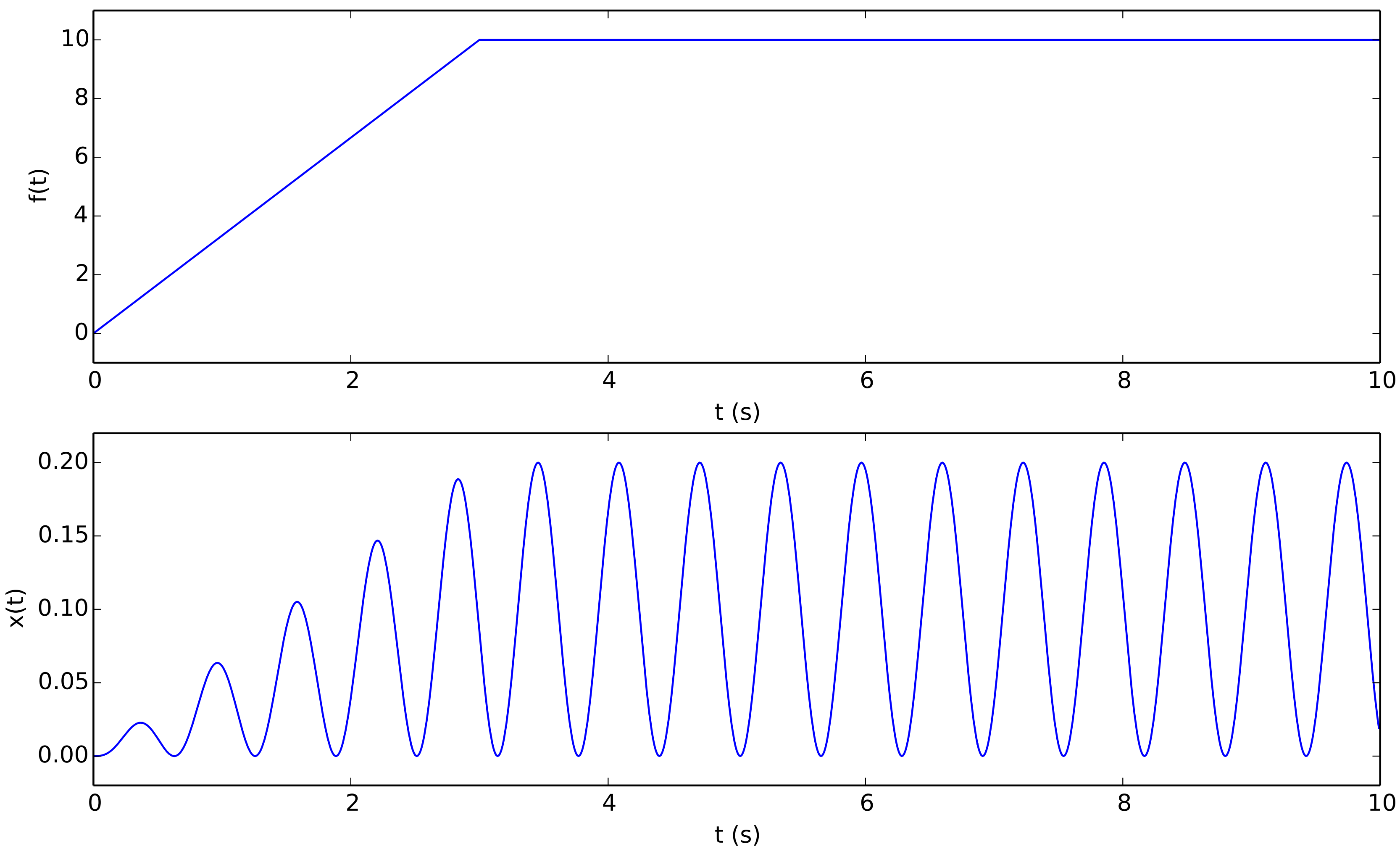
$$l'\,équation\,du\,mouvement\,s'\,écrit : p^2 X(p) + \omega_0^2 X(p) = \frac{F(p)}{m} + p\,x(0) + \dot{x}(0)$$

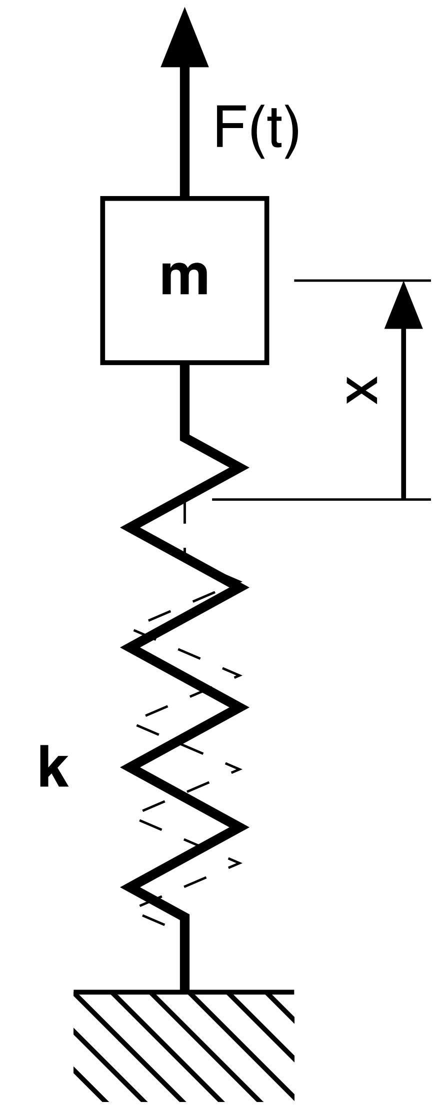
$$\Rightarrow X(p) = \frac{\dfrac{F(p)}{m} + p\,x(0) + \dot{x}(0)}{p^2 + \omega_0^2}$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{f(t)}{m\,\omega_0} \sin(\omega_0 (t-\tau))\,d\tau + \underbrace{x(0)\cos(\omega_0\,t)}_{A} + \underbrace{\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\sin(\omega_0\,t)}_{B}$$

2.Eléments de dynamique des structures
2.2.Système 1 ddl - vibrations forcées

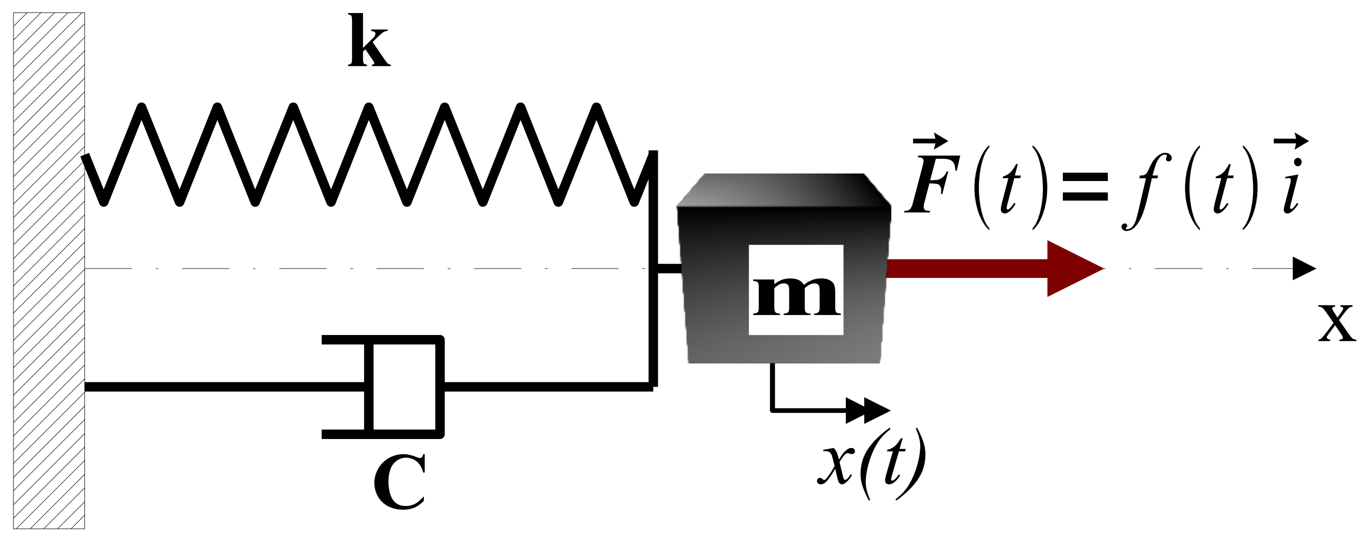
Exemple (m = 1 kg, k = 100 N/m, w_0 = 10 rad/s, f_0 = 1,59 Hz)





$$x(t)=\int_0^t \frac{f(t)}{m\omega_0}\sin(\omega_0(t-\tau))\,d\tau+x(0)\cos(\omega_0\, t)+\frac{\dot{x}(0)}{\omega_0}\sin(\omega_0\, t)$$

2.Eléments de dynamique des structures
2.3.Système 1 ddl amorti



k : raideur (Nm^{-1}),
m : masse (kg),
C : amortissement ($Nm^{-1}s$),
on considère le mouvement à partir de la position d'équilibre stable (x=0 ⇔ pas d'efforts exercés).

$f(t) = 0 \Rightarrow$ mouvement libre

$f(t) \neq 0 \Rightarrow$ mouvement forcé

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

PFD : $$m\ddot{x} = -kx - C\dot{x}$$

Lagrange : $$E_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2,\ E_p = \frac{1}{2}kx^2,\ D = \frac{1}{2}C\dot{x}^2$$

$$\Rightarrow m\ddot{x} + C\dot{x} + kx = 0$$

$$\ddot{x} + \frac{C}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ la pulsation propre (rds^{-1})

et C=2εmω_0 avec ε le coefficient d'amortissement (sans dimension)

d'où l'équation $$\boxed{\ddot{x} + 2\epsilon\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

On pose la solution de la forme e^{rt} on résout alors : $r^2+2\,\epsilon\omega_0\,r+\omega_0^2=0$

$$r=-\epsilon\omega_0\pm\sqrt{\omega_0^2(\epsilon^2-1)}$$

$$\Rightarrow x(t)=A_1\,e^{r_1 t}+A_2\,e^{r_2 t}\ \ avec\ \ \begin{aligned} r_1&=\omega_0\left[-\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-1}\right]\\ r_2&=-\omega_0\left[\epsilon+\sqrt{\epsilon^2-1}\right]\end{aligned}$$

<u>a) cas où ε>1</u> (amortissement supercritique ou surcritique)

$$x(t)=e^{-\epsilon\omega_0 t}\left[A_1\,e^{\sqrt{\epsilon^2-1}\,\omega_0 t}+A_2\,e^{-\sqrt{\epsilon^2-1}\,\omega_0 t}\right]$$

$$\boxed{ou\ \ x(t)=e^{-\epsilon\omega_0 t}\left[A\,ch(\sqrt{\epsilon^2-1}\,\omega_0\,t)+B\,sh(-\sqrt{\epsilon^2-1}\,\omega_0\,t)\right]}$$

<u>b) cas où ε=1</u> (amortissement critique)

$$\boxed{x(t)=e^{-\epsilon\omega_0 t}\left[A\,t+B\right]}$$

2.Eléments de dynamique des structures
2.3.Système 1 ddl amorti

<u>c) cas où ε<1</u> (amortissement subcritique ou souscritique)

$$r_1 = \omega_0 \left[-\epsilon + i\sqrt{1-\epsilon^2} \right], r_2 = -\omega_0 \left[\epsilon + i\sqrt{1-\epsilon^2} \right]$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathrm{e}^{-\epsilon \omega_0 t} \left[A_1\, e^{i\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_0 t} + A_2\, e^{-i\sqrt{1-\epsilon^2}\omega_0 t} \right]$$

$$ou\ bien\ \ x(t) = \mathrm{e}^{-\epsilon \omega_0 t} \left[A\cos(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_0\, t) + B\sin(\sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_0\, t) \right]$$ *avec A et B réels*

$$on\ pose\ \ \Omega = \sqrt{1-\epsilon^2}\,\omega_0 \ \textit{(pseudo pulsation ou pulsation naturelle)}$$

$$et\ \ \lambda = \epsilon\,\omega_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t) \right]$$

$$= \mathrm{e}^{-\lambda t} C\cos(\Omega t - \varphi)$$

C'est un mouvement sinusoïdal amorti

2.Eléments de dynamique des structures
2.3.Système 1 ddl amorti

Exemple

On étudie la réponse à un lâcher : $x(0) = x_0 \; et \; \dot{x}(0) = 0$

On a alors pour les différents cas :

$$\boxed{\text{pour } \varepsilon > 1 \quad x(t) = x_0 \, e^{-\epsilon \omega_0 t} \left[ch\left(\sqrt{\epsilon^2 - 1}\, \omega_0 \, t\right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} sh\left(\sqrt{\epsilon^2 - 1}\, \omega_0 \, t\right) \right]}$$

$$\boxed{\text{pour } \varepsilon = 1 \quad x(t) = x_0 \, e^{-\epsilon \omega_0 t} \left[1 + \omega_0 \, t \right]}$$

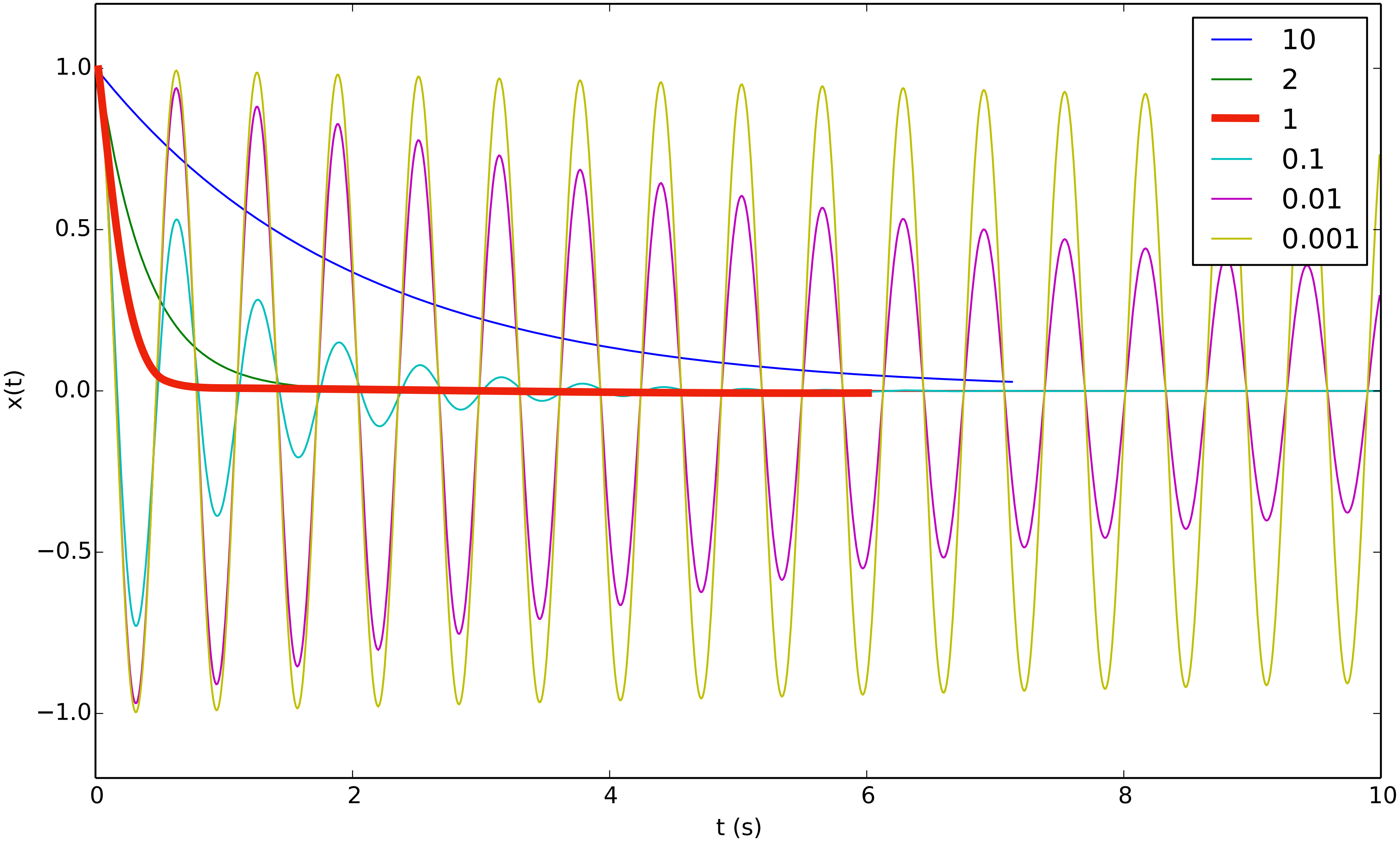
$$\boxed{\begin{aligned} \text{pour } \varepsilon < 1 \quad x(t) &= x_0 \, e^{-\epsilon \omega_0 t} \left[\cos\left(\sqrt{\epsilon^2 - 1}\, \omega_0 \, t\right) + \frac{\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 - 1}} \sin\left(\sqrt{\epsilon^2 - 1}\, \omega_0 \, t\right) \right] \\ &= \frac{x_0 \, e^{-\lambda t}}{\sqrt{1 - \epsilon^2}} \cos(\Omega t - \varphi) \; avec \; \cos\varphi = \sqrt{1 - \epsilon^2} \; et \; \sin\varphi = \epsilon \end{aligned}}$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

Exemple (m = 1 kg, k = 100 N/m, w_0 = 10 rad/s, f_0 = 1,59 Hz)

x_0 = 1 m, ε variable



2.Eléments de dynamique des structures

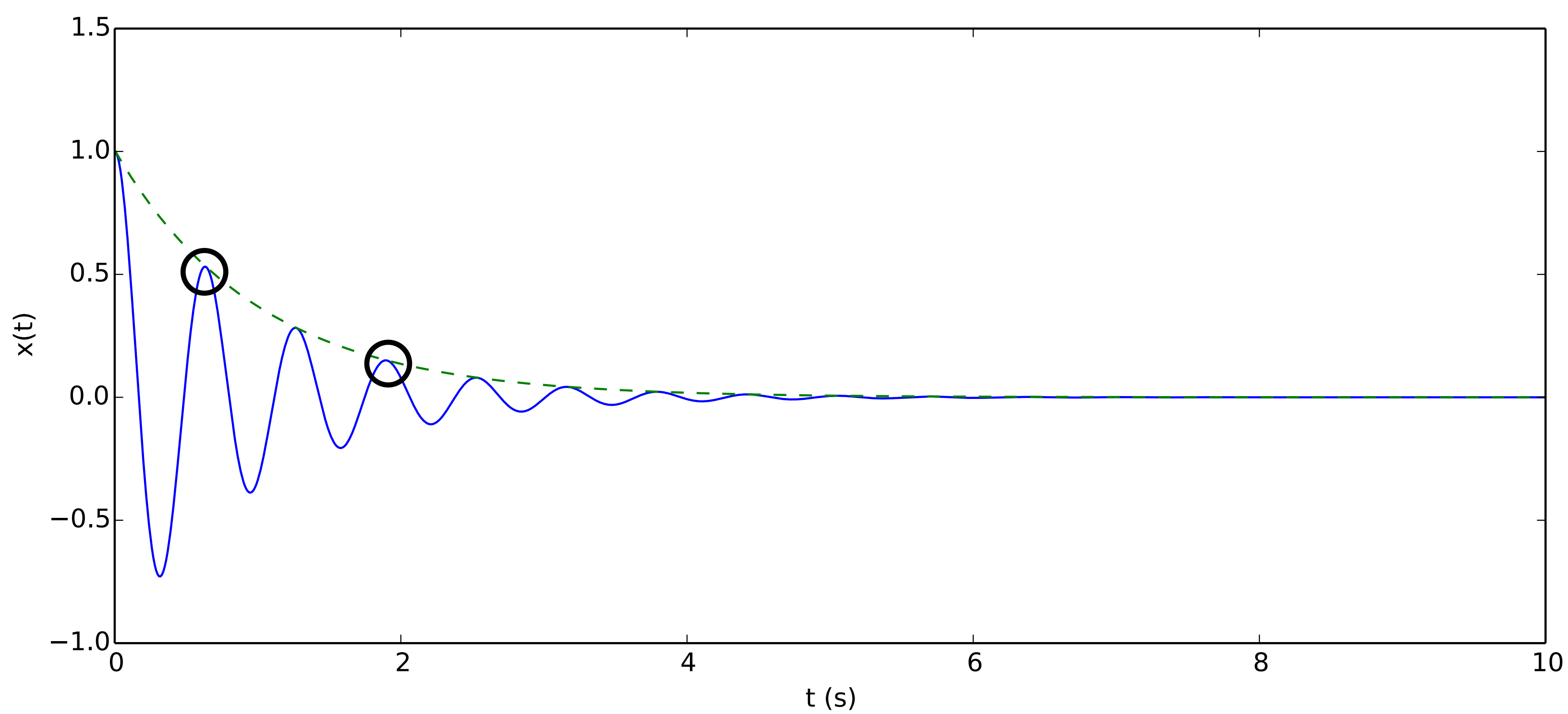
2.3.Système 1 ddl amorti

Identification du coefficient d'amortissement

Lâcher d'un système avec ε < 1 $\Longleftrightarrow$ cas d'oscillations amorties

- soit x_n la n^{ième} valeur maximale de x(t) et x_{n+p} la n+p^{ième}.

- ces valeurs maximales correspondent approximativement aux points de tangence avec la courbe $\frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\epsilon \omega_0 t}$



2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

Identification du coefficient d'amortissement

Lâcher d'un système avec ε < 1 ⟺ cas d'oscillations amorties

on a alors $x_n = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\lambda t_n}$

$x_{n+p} = \frac{1}{\sqrt{1-\epsilon^2}} e^{-\lambda (t_n + pT)}$ *d'où* $\frac{x_n}{x_{n+p}} \approx e^{\epsilon \omega_0 pT}$

$$\Rightarrow \epsilon \omega_0 \, pT \approx \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+p}}\right)$$

comme $T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\epsilon^2}}$

alors $\frac{\epsilon}{\sqrt{1-\epsilon^2}} \approx \frac{1}{2\pi p} \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+p}}\right)$

si ε<<1 on a une équation linéaire et $\boxed{\epsilon \approx \frac{1}{2\pi p} \ln\left(\frac{x_n}{x_{n+p}}\right)}$

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

Solution générale en régime forcé :

$$on\ résoud\quad m\ddot{x}+C\dot{x}+kx=f(t)\ ou\ \ddot{x}+2\,\epsilon\,\omega_0\,\dot{x}+\omega_0^2\,x=\frac{f(t)}{m}$$

On procède de la même manière que pour le système sans amortissement :

$$x(t)=x_g(t)+x_p(t)\ avec$$

$$\underline{x_g(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)\right]}$$

$$x_p(t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}\left[X_1(t)\cos(\Omega t)+X_2(t)\sin(\Omega t)\right]$$

$$et\ \dot{X}_1(t)\cos(\Omega t)+\dot{X}_2(t)\sin(\Omega t)=0$$

En résolvant le système, on obtient :

$$\dot{X}_1(t)=\frac{-1}{m\Omega}\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)\sin(\Omega t)\qquad X_1(t)=\frac{-1}{m\Omega}\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda\tau}f(\tau)\sin(\Omega\tau)\,d\tau$$

$$ou$$

$$\dot{X}_2(t)=\frac{1}{m\Omega}\mathrm{e}^{\lambda t}f(t)\cos(\Omega t)\qquad X_2(t)=\frac{1}{m\Omega}\int_0^t\mathrm{e}^{\lambda\tau}f(\tau)\cos(\Omega\tau)\,d\tau$$

2.Eléments de dynamique des structures
2.3.Système 1 ddl amorti

Solution générale en régime forcé : cas d'une excitation harmonique

f(t)=F cos ω t, l'équation du mouvement s'écrit : $\ddot{x}+2\,\epsilon\,\omega_0\,\dot{x}+\omega_0^2\,x=\dfrac{F}{m}\cos(\omega t)$

<u>Ecriture du régime forcé (pas de transitoire)</u>

on peut calculer $\quad x_p(t)=\dfrac{F}{m\,\Omega}\displaystyle\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-\tau)}\cos(\omega\,\tau)\sin(\Omega(t-\tau))\,d\tau$

ou bien utiliser les complexes ⇒ on associe à l'équation en x une équation en y tq :

$$\ddot{y}+2\,\epsilon\,\omega_0\,\dot{y}+\omega_0^2\,y=\frac{F}{m}\sin(\omega t)\ \textit{en posant}\ z=x+iy\ \textit{avec}\ \begin{matrix} x=\Re(z) \\ y=\Im(z)\end{matrix}$$

z est solution de l'équation $\quad \ddot{z}+2\,\epsilon\,\omega_0\,\dot{z}+\omega_0^2\,z=\dfrac{F}{m}\mathrm{e}^{i\omega t}$

le régime forcé ⇔ solution particulière s'écrit $\quad z(t)=Z\,\mathrm{e}^{i\omega t}$

d'où $\quad Z\,\mathrm{e}^{i\omega t}\left(-\omega^2+2\,i\epsilon\,\omega_0\,\omega+\omega_0^2\right)=\dfrac{F}{m}\mathrm{e}^{i\omega t}\Rightarrow Z=\dfrac{F}{m\left(\omega_0^2-\omega^2+2\,i\epsilon\,\omega_0\,\omega\right)}$

que l'on met plutôt sous la forme

$$z(t)=|Z|\mathrm{e}^{i(\omega t-\phi)}=\frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\,\epsilon\,\omega_0\,\omega\right)^2}}\mathrm{e}^{i(\omega t-\phi)}$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

Solution générale en régime forcé : cas d'une excitation harmonique

on obtient alors $x(t)=\Re(z(t))=|Z|\cos(\omega t-\phi)=X\cos(\omega t-\phi)$

$$X(\omega)=\frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\epsilon\omega_0\omega\right)^2}}$$

avec

$$tg(\phi(\omega))=\frac{2\epsilon\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=\frac{2\epsilon\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

On définit H(ω) la fonction de transfert de *f(t)* vers *x(t)* telle que *x(t)=H(ω)f(t)*
que l'on peut décomposer par $z(t)=A(\omega)e^{-i\Phi(\omega)}f(t)$
avec A(ω) l'amplitude de la fonction de transfert,
Φ(ω) la phase de la fonction de transfert.

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

$$x(t)=\Re(z(t))=|Z|\cos(\omega t-\phi)=X\cos(\omega t-\phi)$$

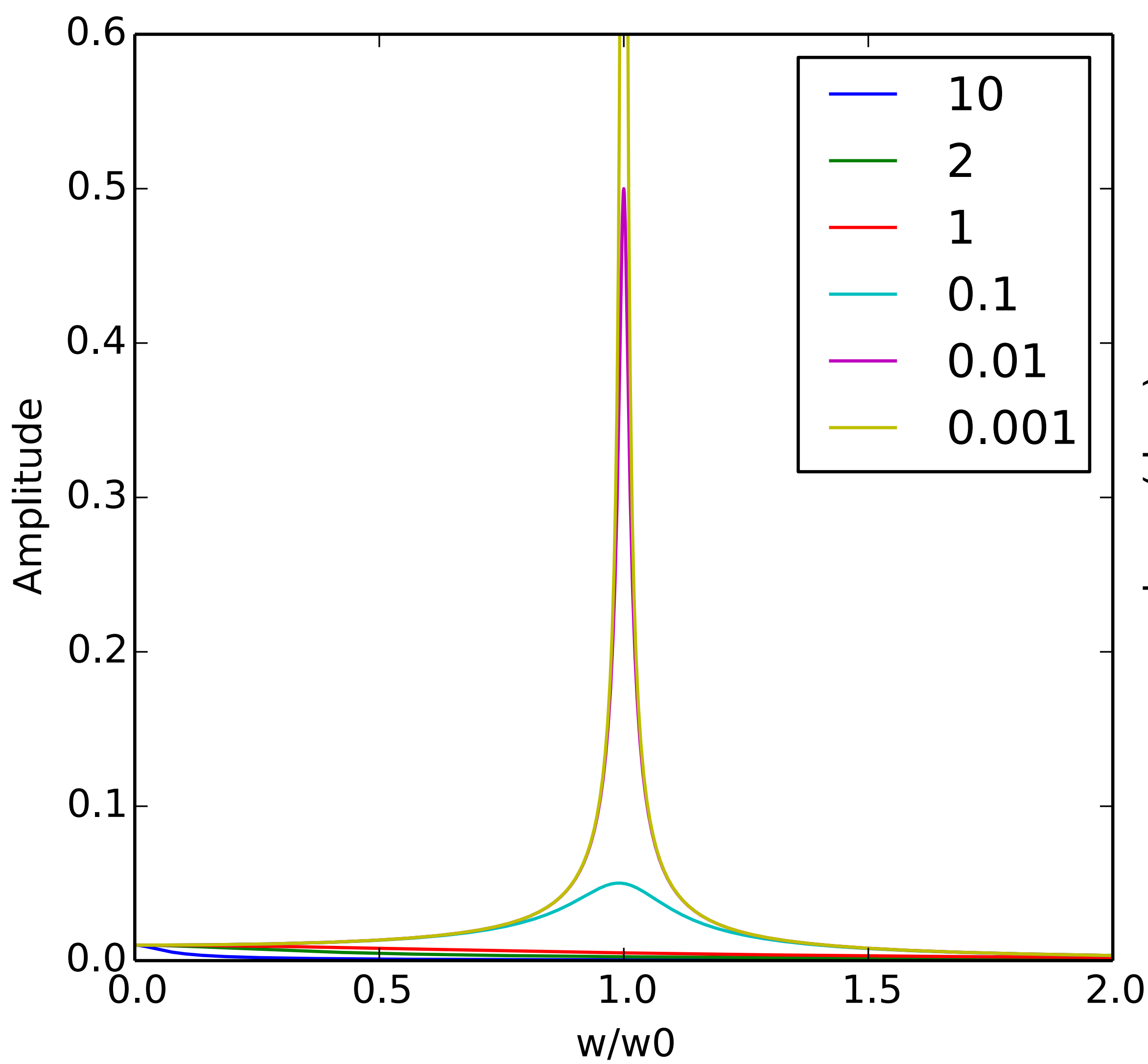
$$X(\omega)=\frac{F}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\left(2\epsilon\omega_0\omega\right)^2}}$$

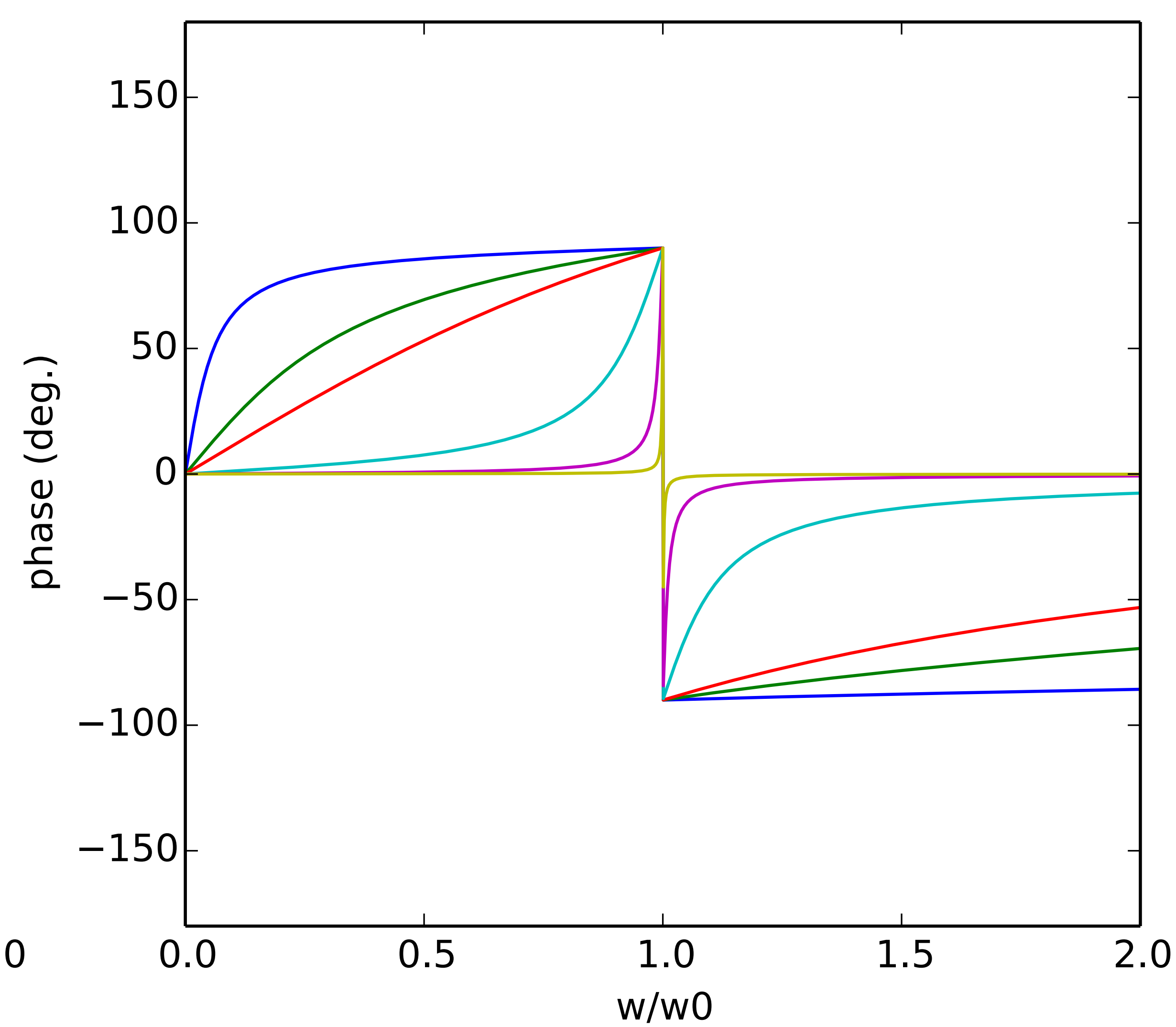
avec

$$tg(\phi(\omega))=\frac{2\epsilon\omega_0\omega}{\omega_0^2-\omega^2}=\frac{2\epsilon\dfrac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Régime forcé : cas d'une excitation harmonique

Fonction de transfert - Représentation de Bode





2.Eléments de dynamique des structures
2.3.Système 1 ddl amorti

Points caractéristiques

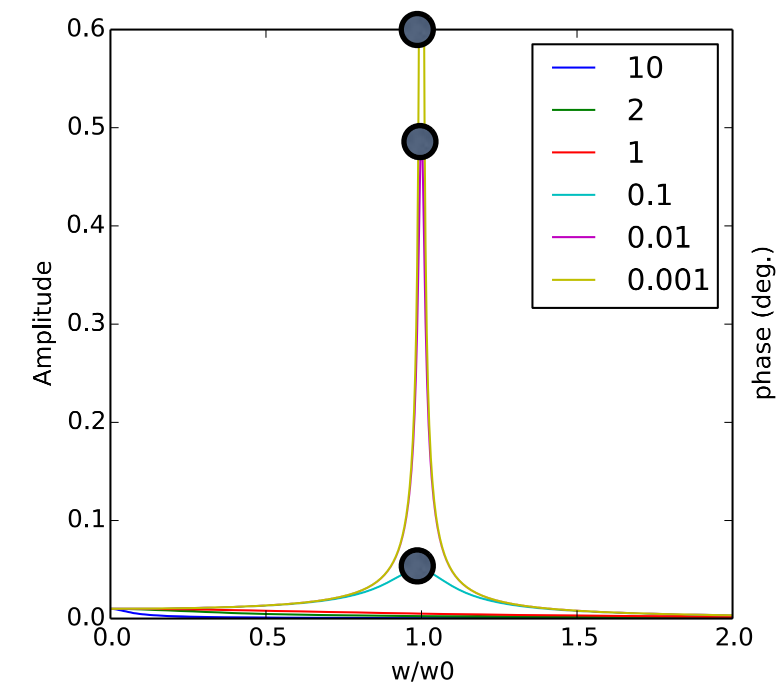
- origine $A(0)=\dfrac{1}{m\omega_0^2}=\dfrac{1}{k}$ (amplitude statique)
- pic (résonance d'amplitude) $m\dfrac{\partial A(\omega)}{\partial\omega}=\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\epsilon^2\omega_0^2\omega^2\right]^{\frac{-1}{2}}=0$

$$=\frac{-1}{2}\frac{-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\epsilon^2\omega_0^2\omega^2}{\left[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\epsilon^2\omega_0^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}}=0$$

le numérateur donne : $\begin{cases}\omega_r=0 \ \ si\ \epsilon>\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ \omega_r^2=\omega_0^2(1-2\epsilon^2)\ \ si\ \epsilon<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\approx\omega_0^2\ \ si\ \epsilon\ll 1\end{cases}$

$$alors\ \ A(\omega_0^2(1-2\,\epsilon^2))=\frac{1}{2\,m\omega_0^2\,\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}}\approx\frac{1}{2\,m\omega_0^2\,\epsilon}$$

$$et\ \ tg\,\phi_r=\frac{\sqrt{1-2\,\epsilon^2}}{\epsilon}$$



2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

Points caractéristiques

- résonance de phase $\omega = \omega_0 \Rightarrow tg\,\phi(\omega_0) = \infty \Rightarrow \phi = \dfrac{\pi}{2}$
- énergie dissipée par cycle $W = \displaystyle\int_0^T f(t)\,\dot{x}\,dt = -\int_0^{2\frac{\pi}{\omega}} F\cos(\omega\,t)\left[-\omega\,X\sin(\omega\,t-\phi)\right]dt$

$$= \frac{-\pi\,X^2}{A}\omega\sin\phi \;\; avec \;\; X = A\,F$$

- pour ε<<1 :

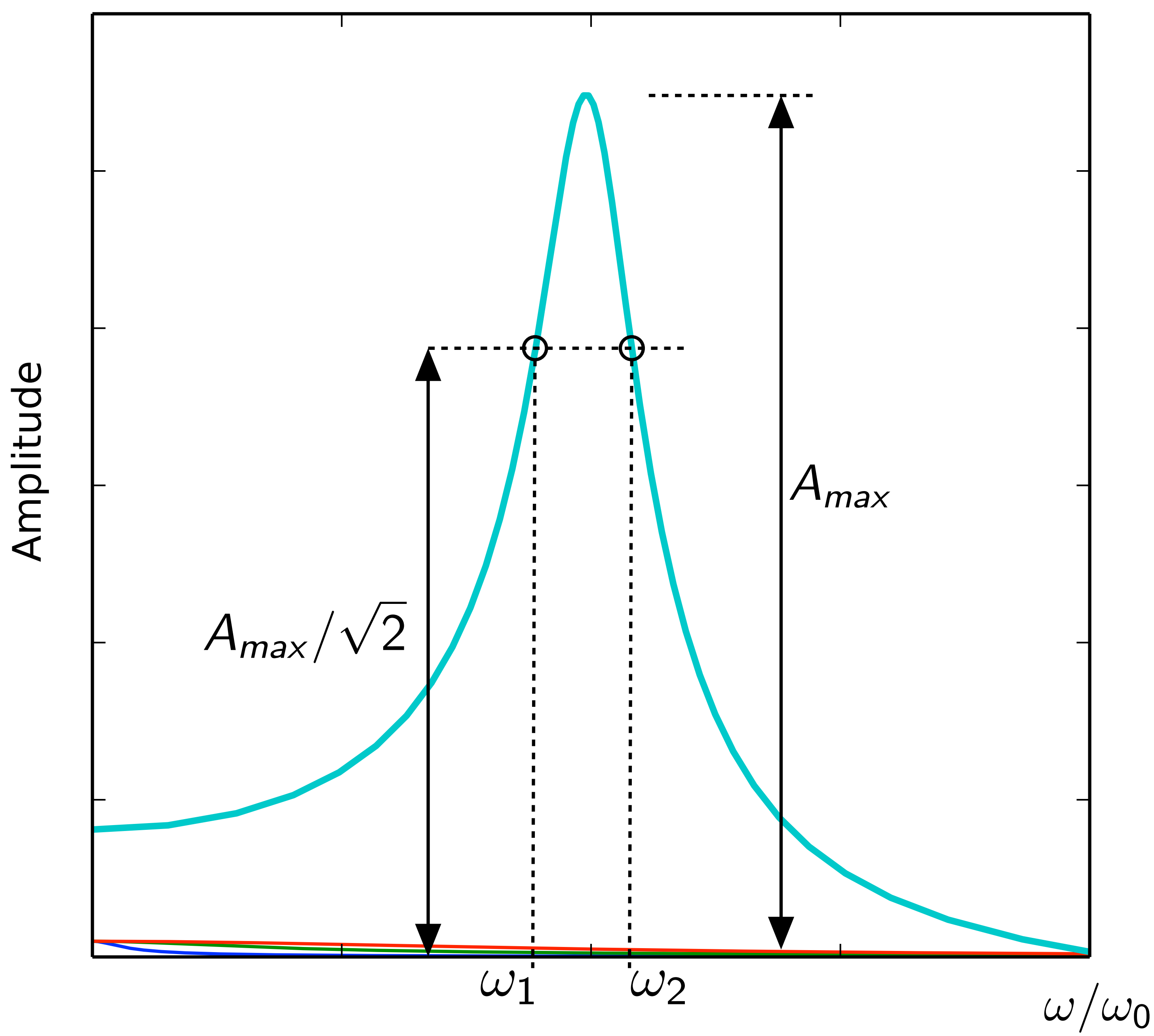
on définit la largeur de bande par l'intervalle ω_2-ω_1 situé au voisinage de ω_r tel que

$A(\omega_1) = A(\omega_2) = \dfrac{A_{max}}{\sqrt{2}}$ (l'énergie dissipée en ω_2 et ω_1 est la moitié de celle dissipée en ω_r). On montre que ω_2-ω_1= Δω = $2\omega_0$ε. ⟶ **identification de l'amortissement**

2.Eléments de dynamique des structures

2.3.Système 1 ddl amorti

Régime forcé : identification de l'amortissement depuis le diagramme de Bode



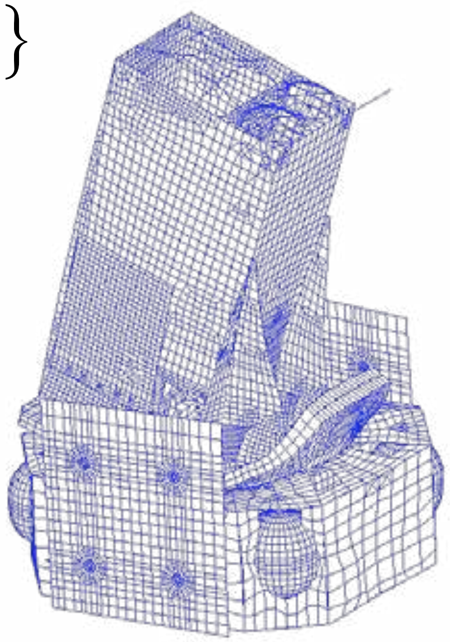
$$\omega_2 - \omega_1 = 2\omega_0\epsilon$$

2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl

Même démarche, mais sous forme matricielle :

$$\boxed{m\ddot{x}+k\,x=0} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{M}]\{\ddot{\mathrm{x}}\}+[\mathrm{K}]\{\mathrm{x}\}=\{0\}$$



où chaque degré de liberté $\qquad x_i(t) = X_i e^{r_i t}$

doit respecter $\qquad \left(r^2[\mathrm{M}]+[\mathrm{K}]\right)\{\mathrm{X}\}=\{0\}$

qui est un problème aux valeurs propres

- valeurs = pulsation propres
- vecteurs propre = formes modales

2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

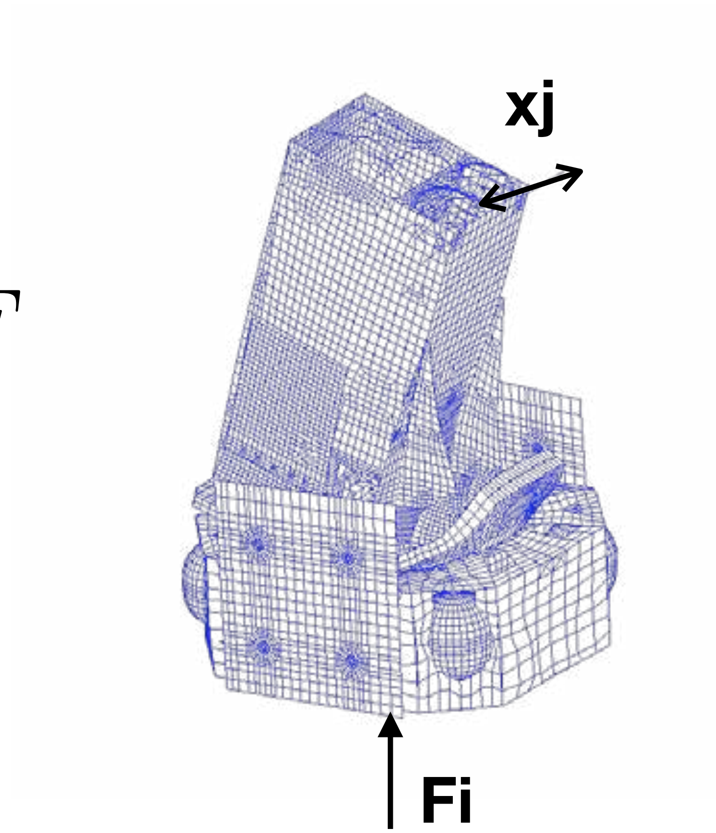
Sous une excitation de pulsation w, pour un système amorti l'équation prend la forme suivante :

$$[M]\ddot{X} + [C]\dot{(X)} + [K]X = F$$

soit

$$\boxed{\left(-[M]w^2 + [C]jw + [K]\right)} X = F$$

K_d : raideur dynamique



Les relations entre les sorties x_j et les excitations F_i en entrée sont définies dans l'inverse de cette raideur, notée H

$$K_d X = F \quad \Rightarrow \quad X = K_d^{-1} F = HF$$

Il s'agit de la fonction de transfert (TF), ou **réponse fréquentielle (FRF)**, de la structure, généralisée à tous les degrés de liberté.

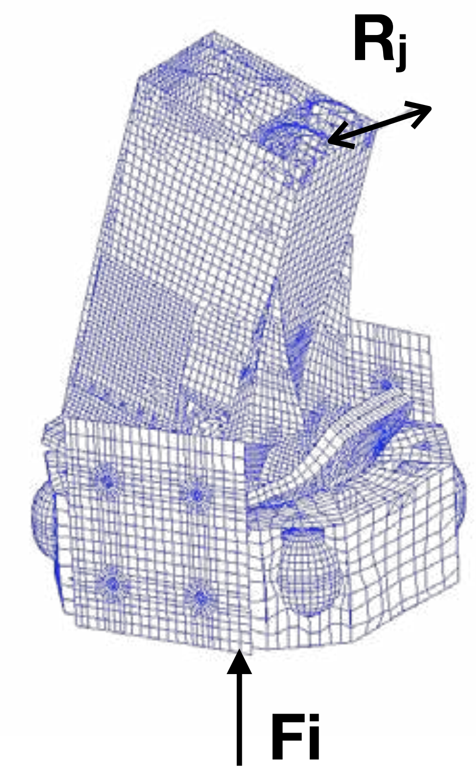
2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

Les **fonctions de réponses fréquentielles** peuvent relier différentes grandeurs physiques.

Ce sont des fonctions complexes de la pulsation d'excitation ω.

Response Parameter R	Standard FRF: R/F	Inverse FRF: F/R
DISPLACEMENT	RECEPTANCE ADMITTANCE DYNAMIC COMPLIANCE DYNAMIC FLEXIBILITY	DYNAMIC STIFFNESS
VELOCITY	MOBILITY	MECHANICAL IMPEDANCE
ACCELERATION	ACCELERANCE INERTANCE	APPARENT MASS



2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

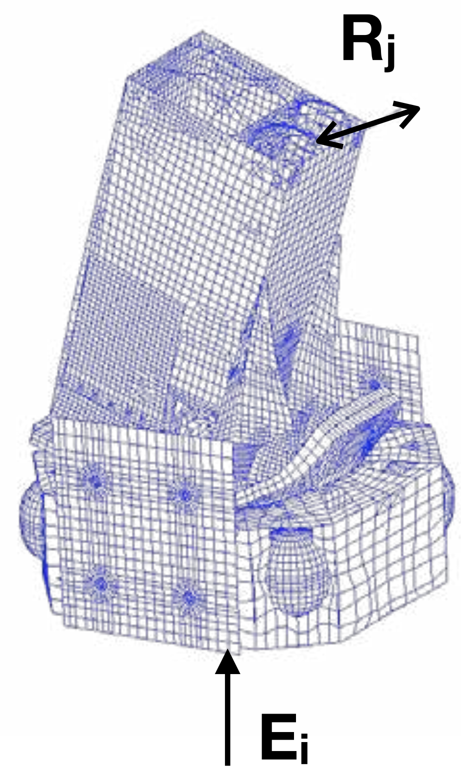
Les **fonctions de réponses fréquentielles** peuvent relier différentes grandeurs physiques.

Ce sont des fonctions complexes de la pulsation d'excitation ω.

Excitations / Responses	$\mathbf{F}_i$	$\mathbf{u}_j$	$\dot{\mathbf{u}}_j = i\omega\,\mathbf{u}_j$	$\ddot{\mathbf{u}}_j = -\omega^2\,\mathbf{u}_j$
$\mathbf{F}_j$	Transmissibilities (-) $\mathbf{T}_{ji}$ *	Stiffnesses (2) $\mathbf{K}_{jj}$	Impedances $\mathbf{Z}_{jj} = \mathbf{K}_{jj} / i\omega$	Masses (5) $\mathbf{M}_{jj} = \mathbf{K}_{jj} /(-\omega^2)$
$\mathbf{u}_i$	Flexibilities (1) $\mathbf{G}_{ii}$	Transmissibilities $\mathbf{T}_{ij}$	$\mathbf{T}_{ij} / i\omega$	$\mathbf{T}_{ij} /(-\omega^2)$
$\dot{\mathbf{u}}_i = i\omega\,\mathbf{u}_i$	Admittances (3) $\mathbf{Y}_{ii} = i\omega\,\mathbf{G}_{ii}$	$i\omega\mathbf{T}_{ij}$	Transmissibilities $\mathbf{T}_{ij}$	$\mathbf{T}_{ij} / i\omega$
$\ddot{\mathbf{u}}_i = -\omega^2\mathbf{u}_i$	Accelerances (4) $\mathbf{A}_{ii} = -\omega^2\mathbf{G}_{ii}$	$-\omega^2\mathbf{T}_{ij}$	$i\omega\,\mathbf{T}_{ij}$	Transmissibilities $\mathbf{T}_{ij}$

* Sign (-), the considered responses being the reaction forces, opposed to the transmitted forces

Other names:
(1) compliances, receptances
(2) rigidities
(3) mobilities
(4) inertances (ambiguous term, to be avoided)
(5) apparent masses

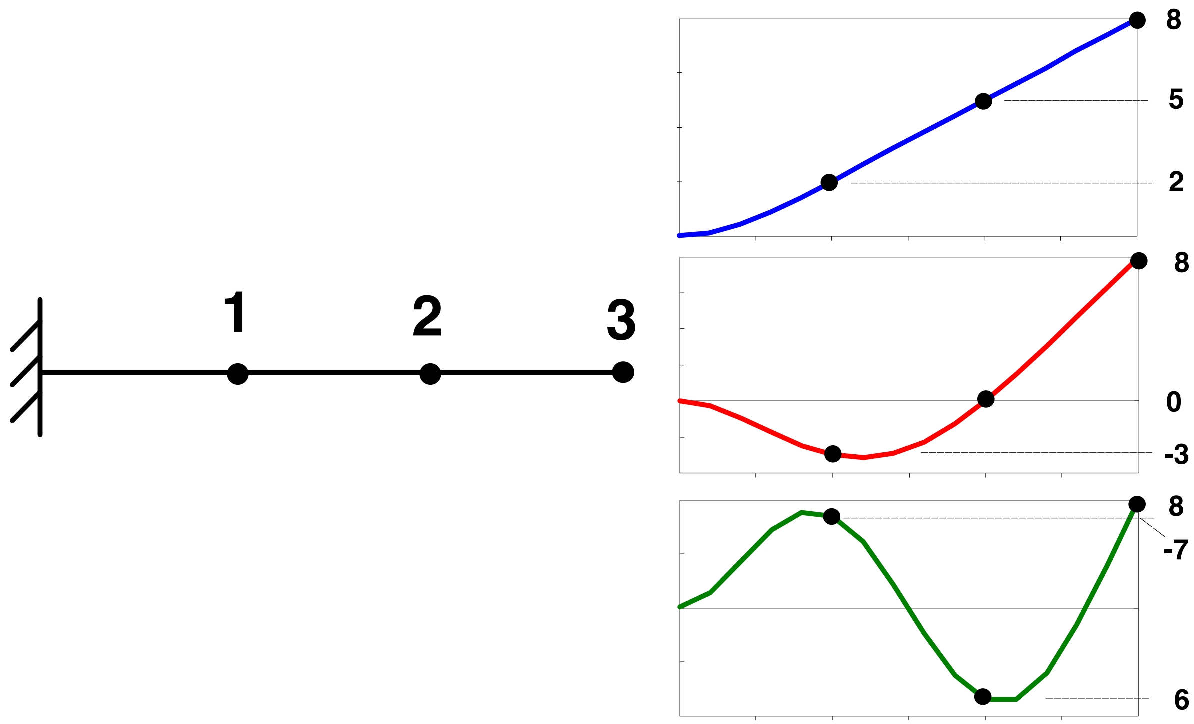


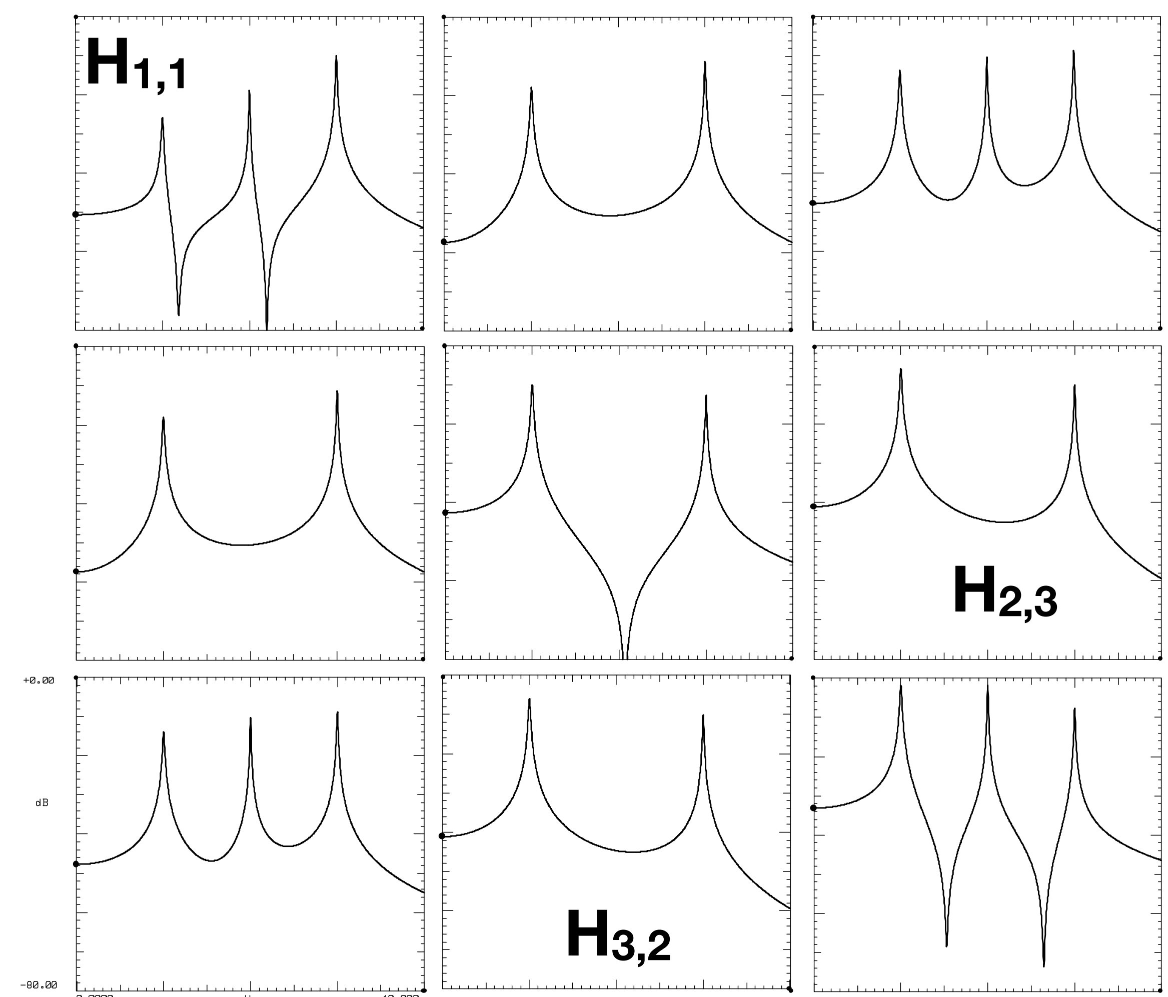
2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

Les **fonctions de réponses fréquentielles** peuvent relier différentes grandeurs physiques.

Ce sont des fonctions complexes de la pulsation d'excitation ω.

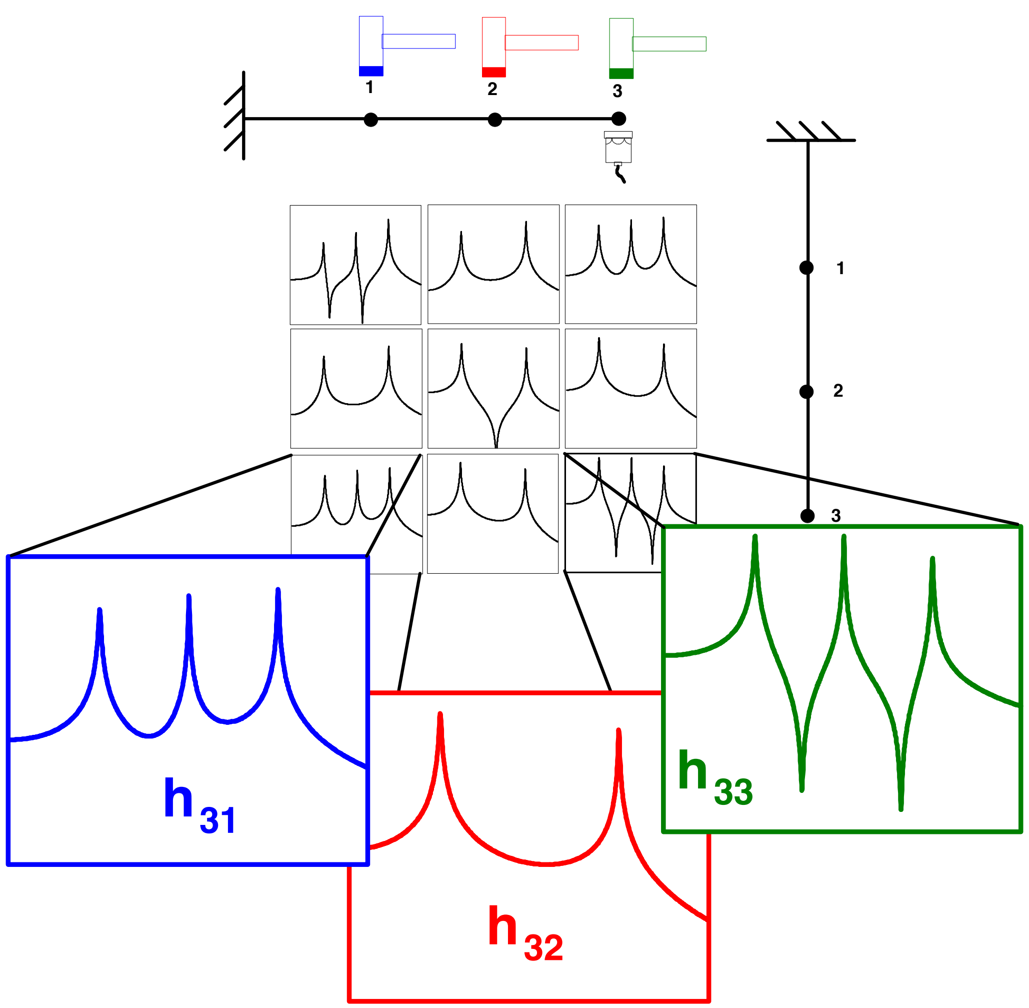




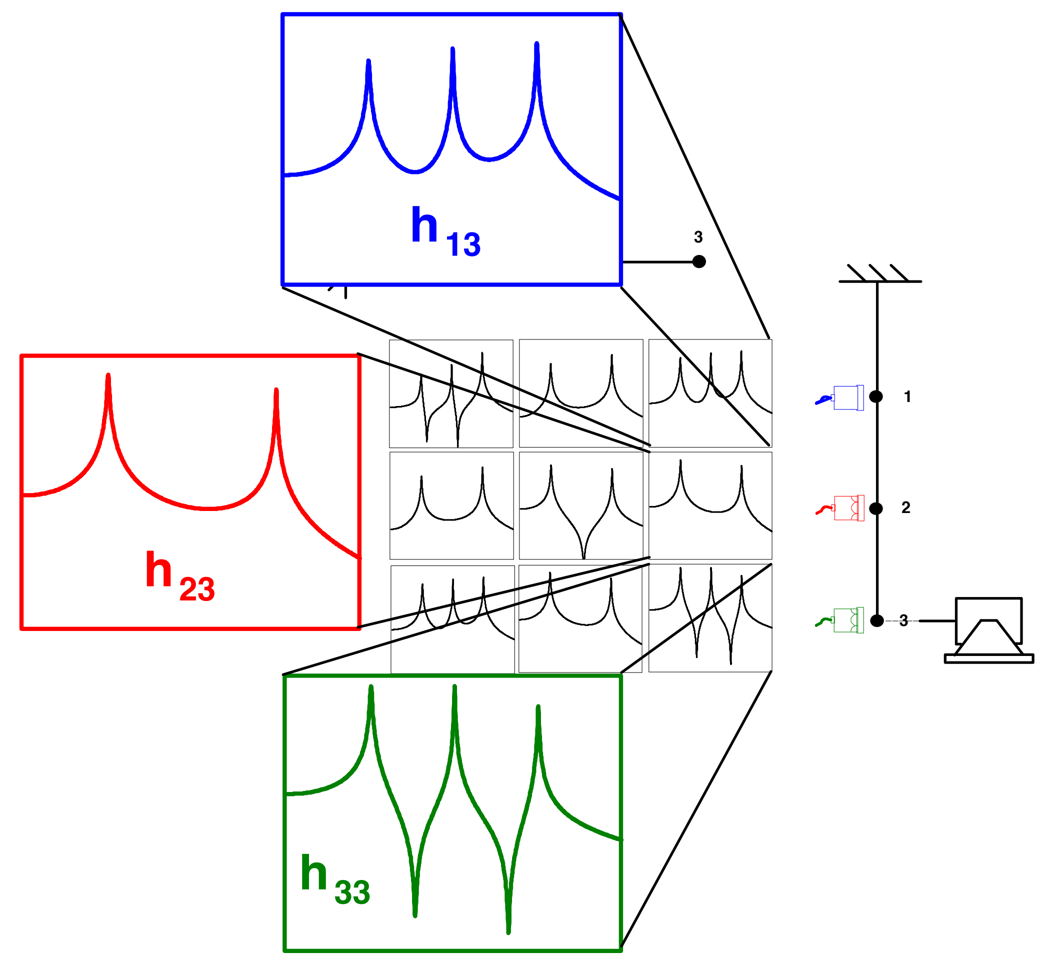
2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

Ces fonctions FRF traduisent, sous forme spectrale, l'amplification induite en point par une excitation en un autre point. On peut les calculer numériquement à partir d'un modèle, mais aussi les identifier expérimentalement, par analyse FFT.



marteau de choc
+ capteur (mesure en sortie) fixe

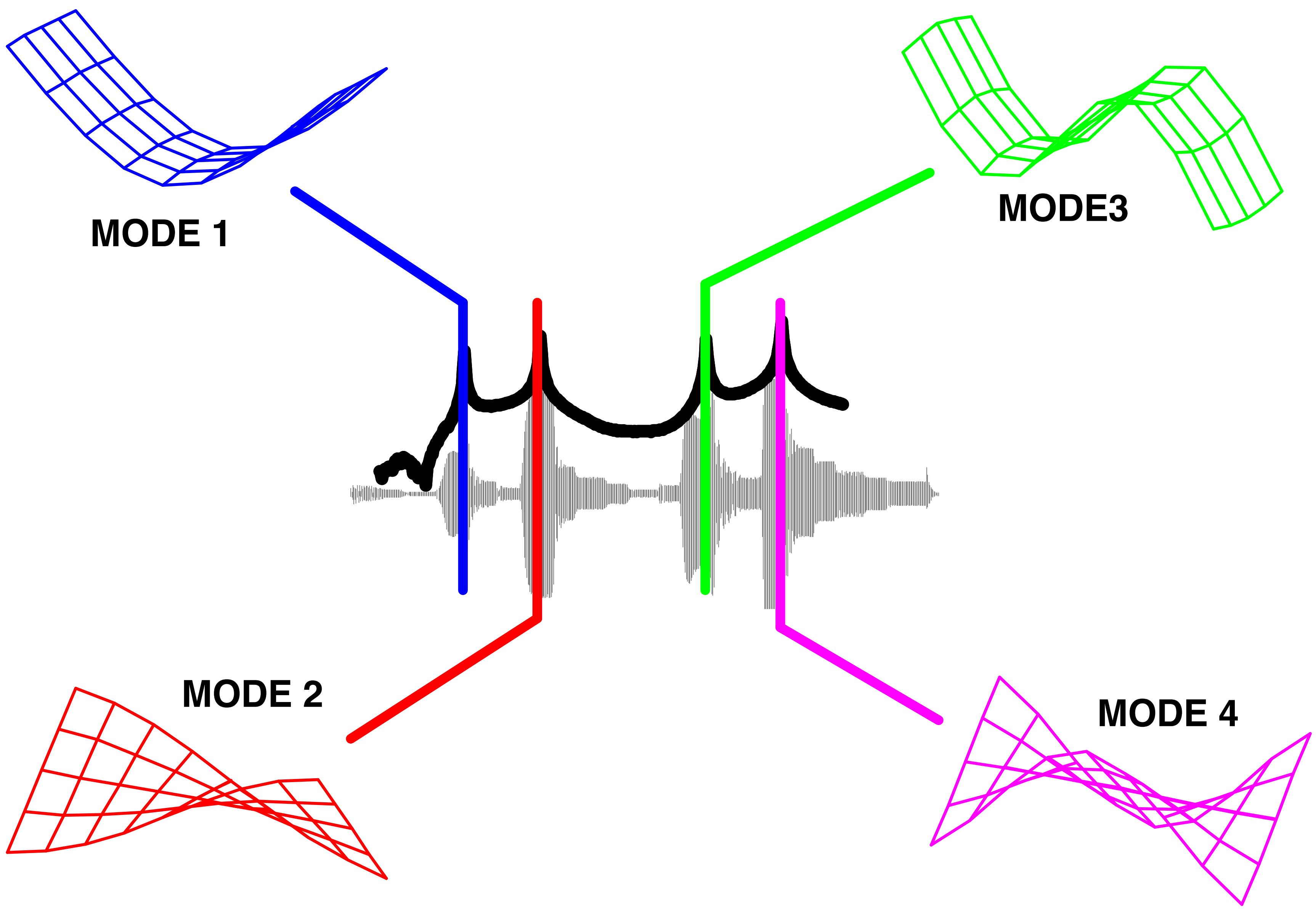


vibrateur fixe
+ capteur (mesure en sortie) mobile

2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

Les **modes propres** correspondent au pics (amplification importantes) observés sur les FRF.

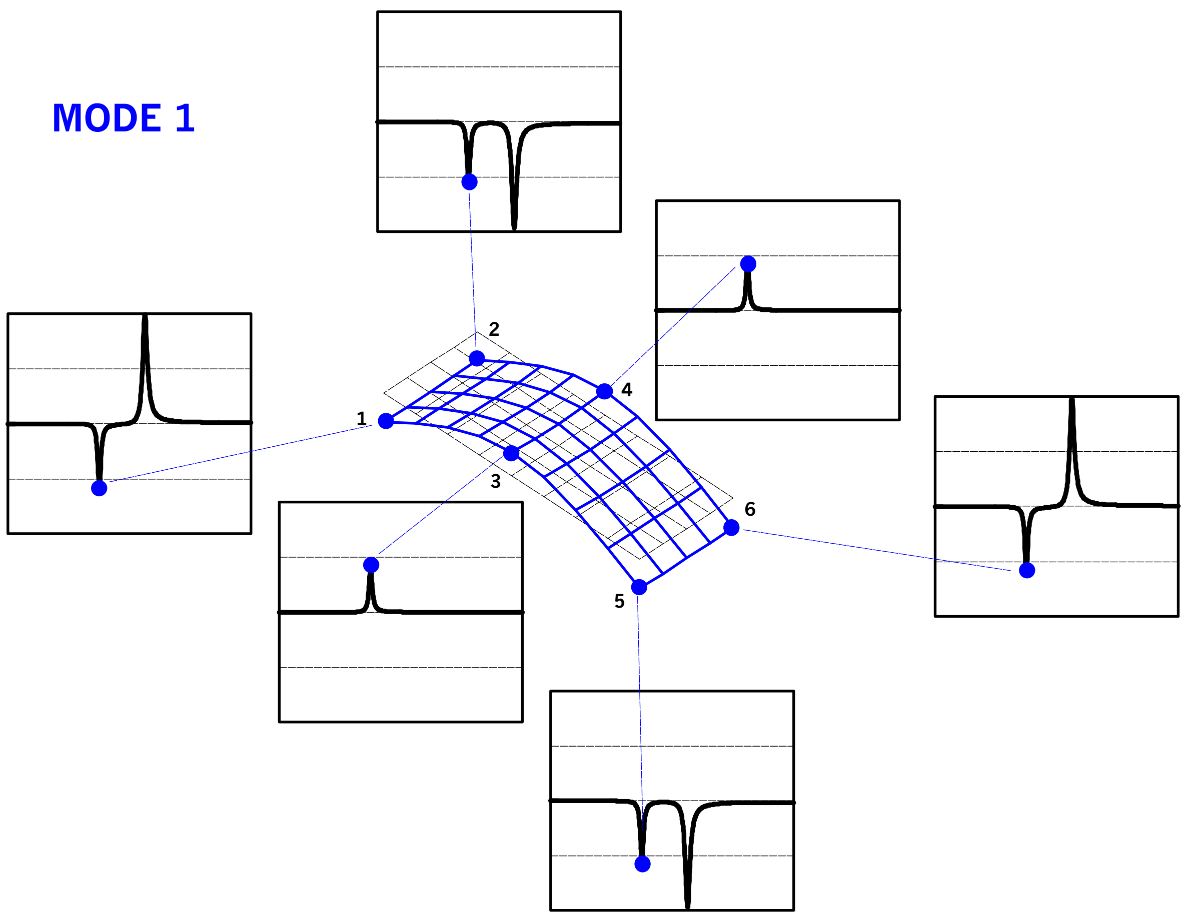


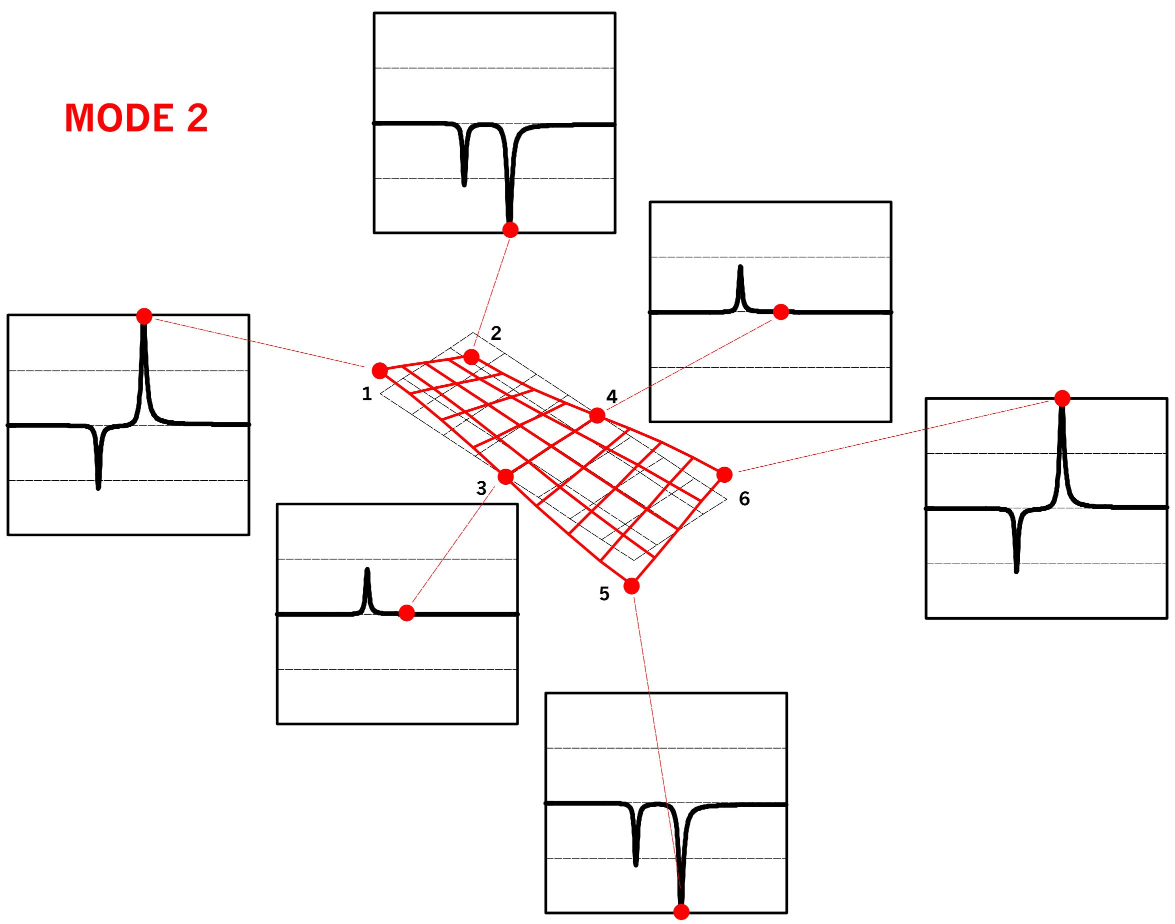
2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

Les **formes modales** sont les champs de déplacements associés à chaque modes, décrivant le mouvement de la structure à la fréquence propre correspondante.

Ces formes se déduisent des valeurs complexes (amplitude + déphasage) des FRF de chaque point, prises pour la même fréquence propre.

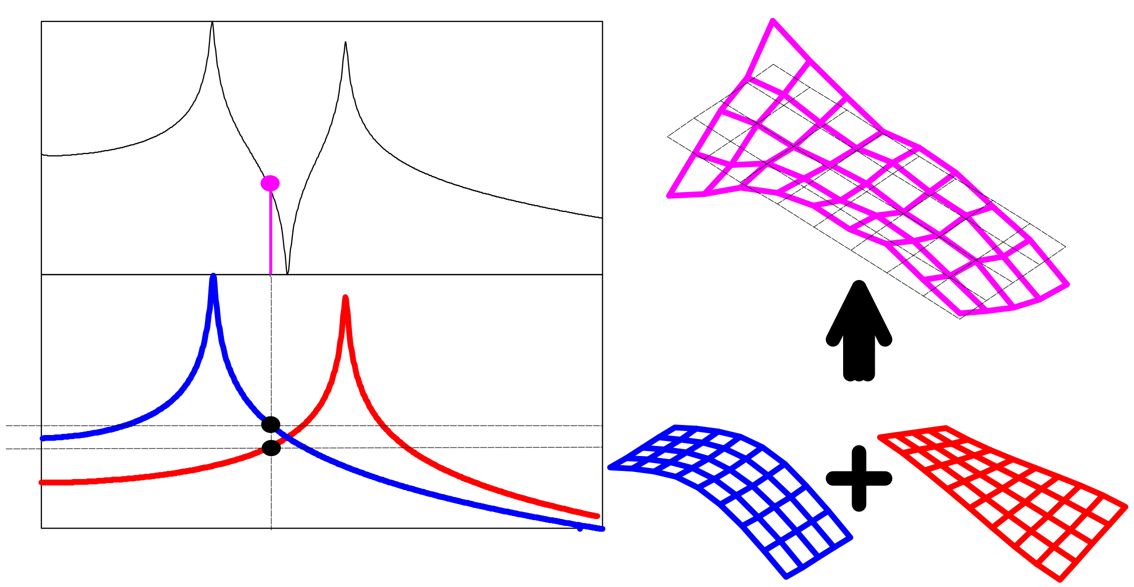


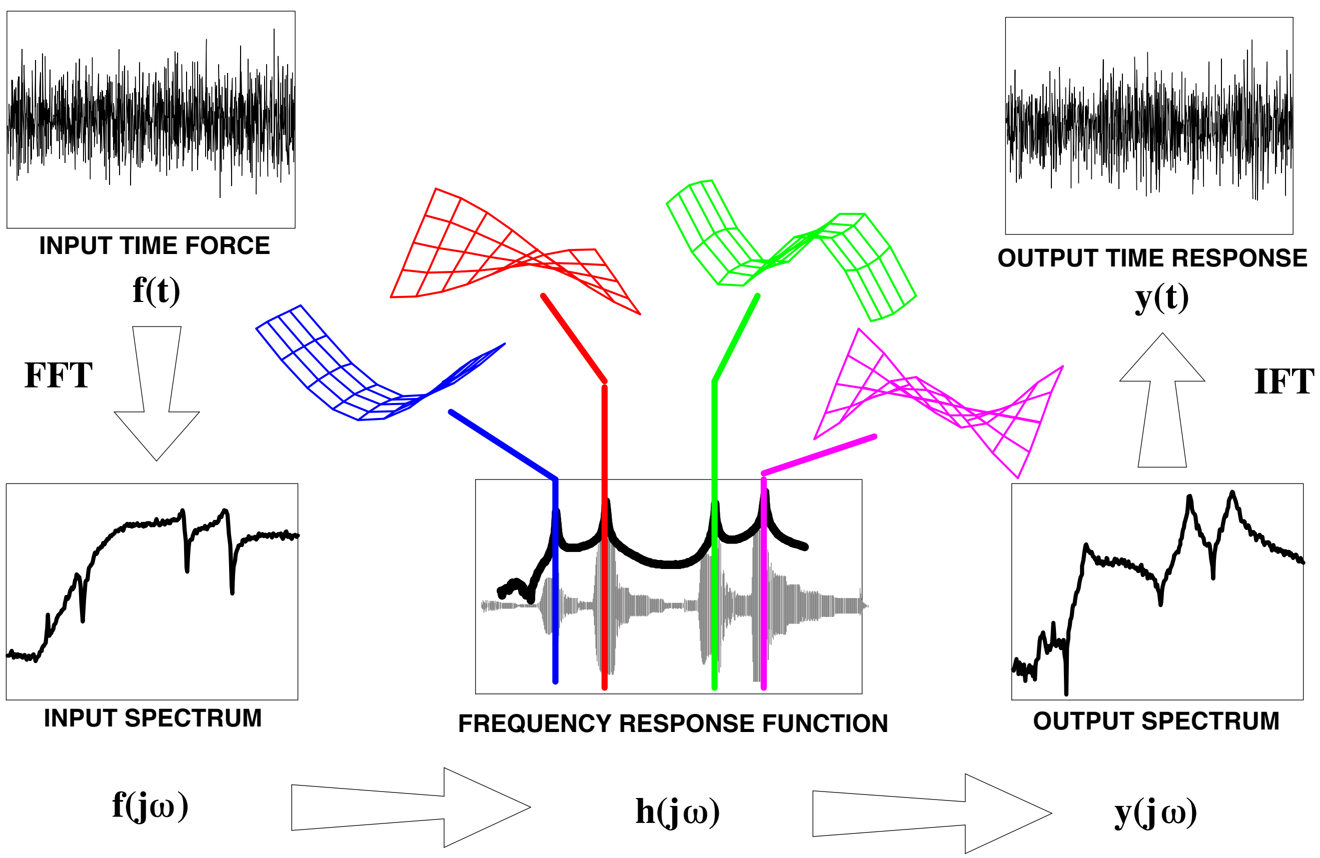


2.Eléments de dynamique des structures

2.4.Système n-ddl amorti forcé

Les formes modales permettent, par recombinaisons linéaires des modes, de reconstituer les mouvements pour toute fréquence. La FRF agit entre deux points de la structure comme un filtre. On peut donc l'utiliser pour prédire la réponse à une entrée de contenu fréquentiel déterminé. Les fréquences propres sont des valeurs singulières pour lesquelles des mouvements importants peuvent présenter un danger pour la tenue de la structure.





TD1

Structure : carte Epoxy (E = 3 GPa, d = 1, ξ = 0.1) de longueur 20 cm, largeur 10 cm, épaisseur 2mm, sur 2 appuis linéiques simples + 1 composant (ponctuel) 50g.

a) modèle 1 DDL

b) modèle 2 DDL (2 lignes à 6 cm de chaque bord)

Pour chaque cas :

- Etablir l'équation du mouvement
- Déterminer les fréquences propres et modes associés (scilab)
- Constituer la fonction de transfert ayant pour entrée :
    - une force sur le composant
    - l'accélération aux appuis

Fonctions scilab : eigs, bode, tf2ss, repfreq, sysslan..

TD2

A partir de la fonction de transfert établie, calcul de la réponse pour différents signaux :

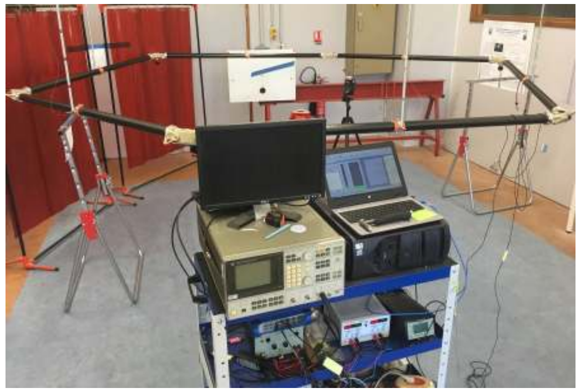
- sinus forcé, sinus balayé
- choc (dirac, demi-sinus…)
- bruit
    - uniforme
    - filtré BF (0-50 Hz)
    - large bande : 50 - 1 kHz

Fonctions scilab : tf2ss, csim, syslin…

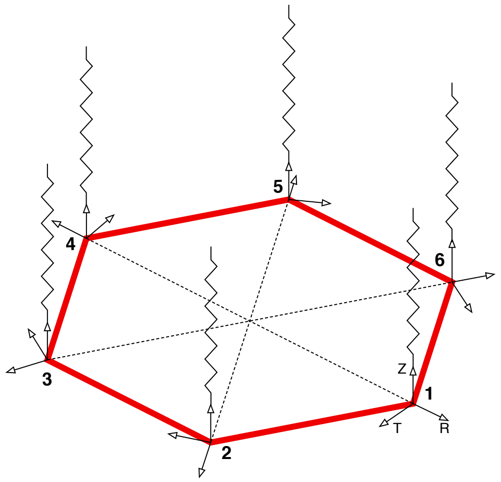
TD3

A partir des FRF données, analyser les premiers modes :

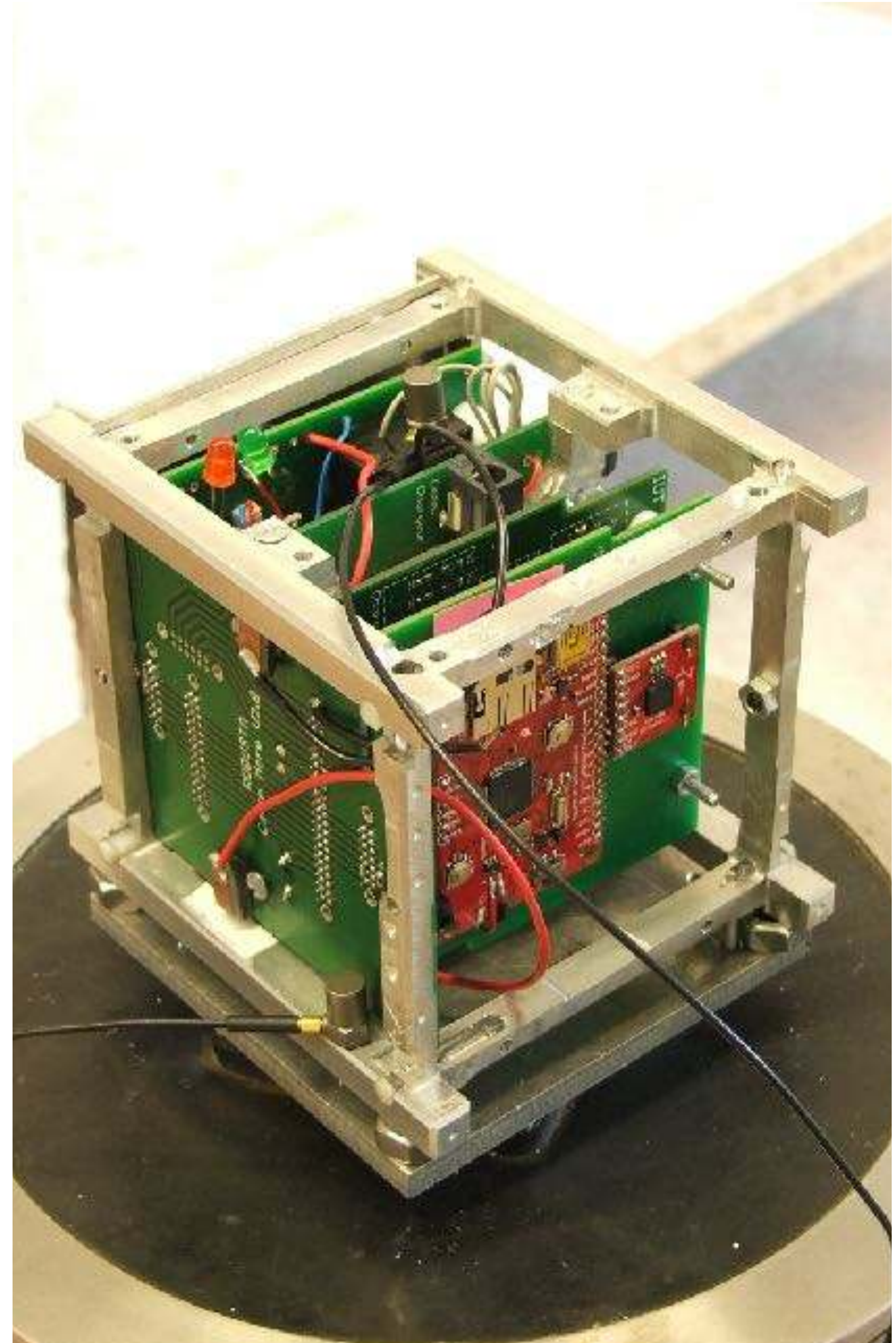
- fréquence propre
- coefficient d'amortissement
- formes modales (amplitude + déphasage en chaque point)



Fonctions scilab : readcsv, bode…

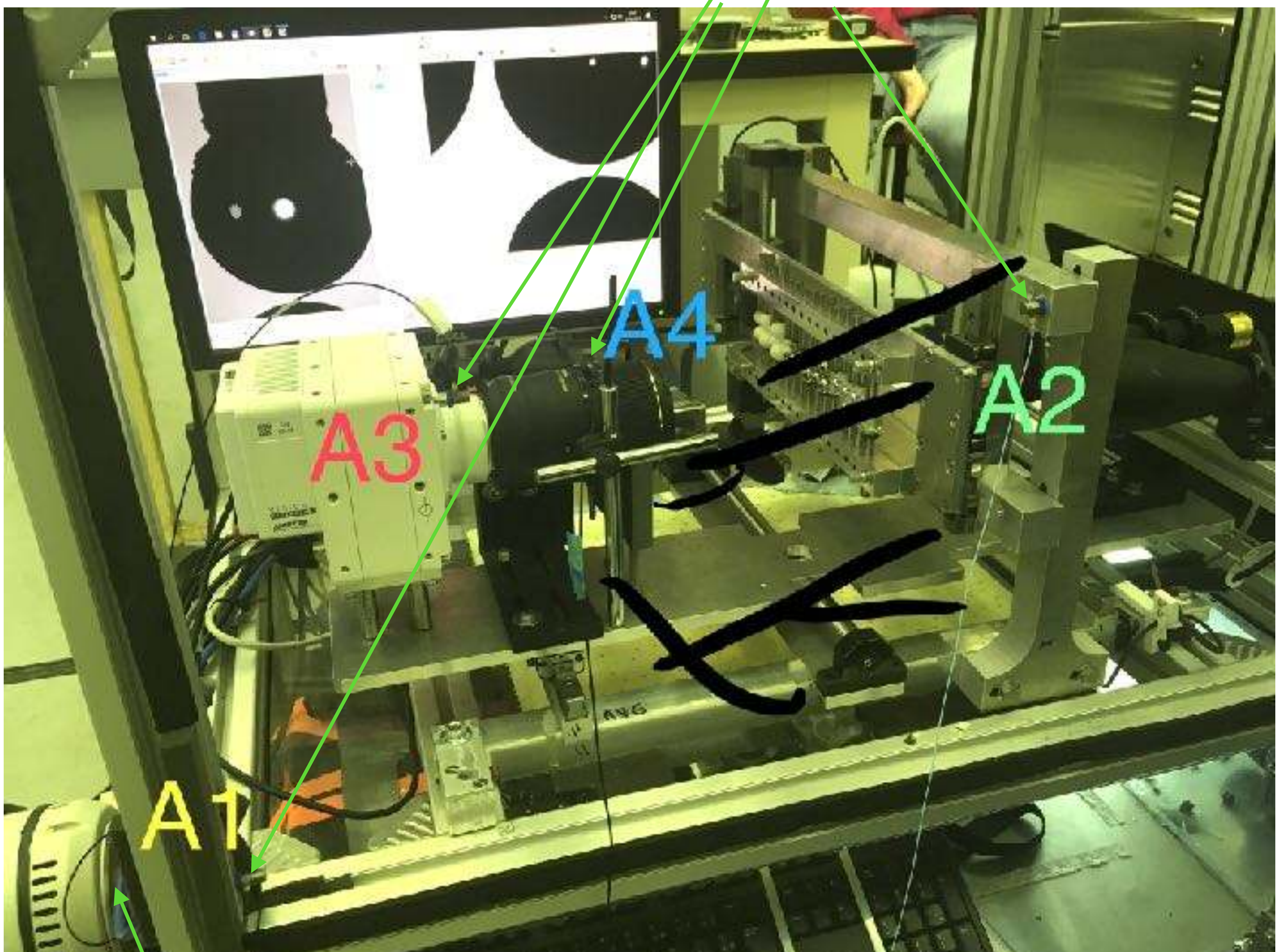


3. Mesures



3.Mesures

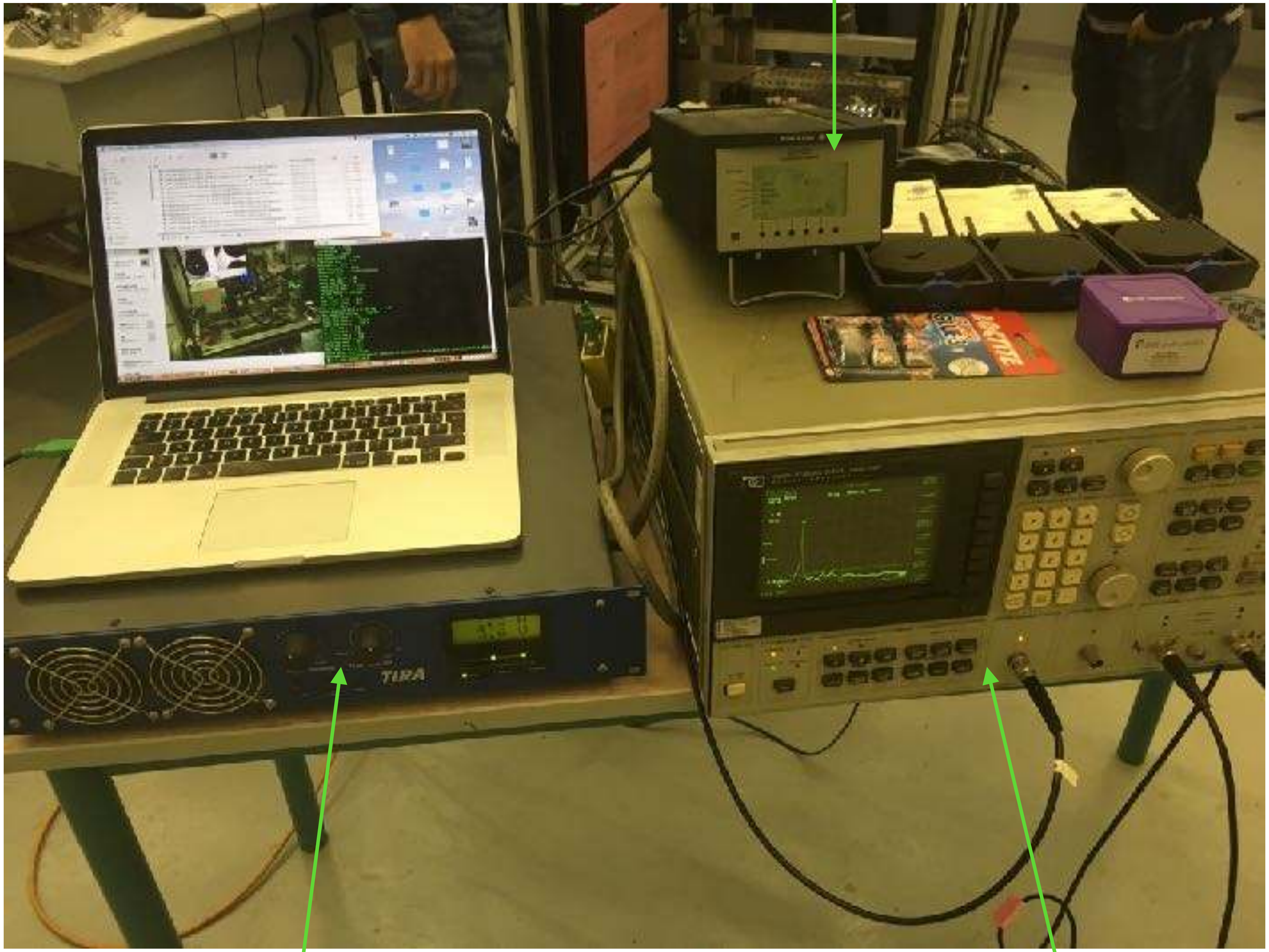
accéléromètres



pot vibrant

3.Mesures

conditionneur
de signaux

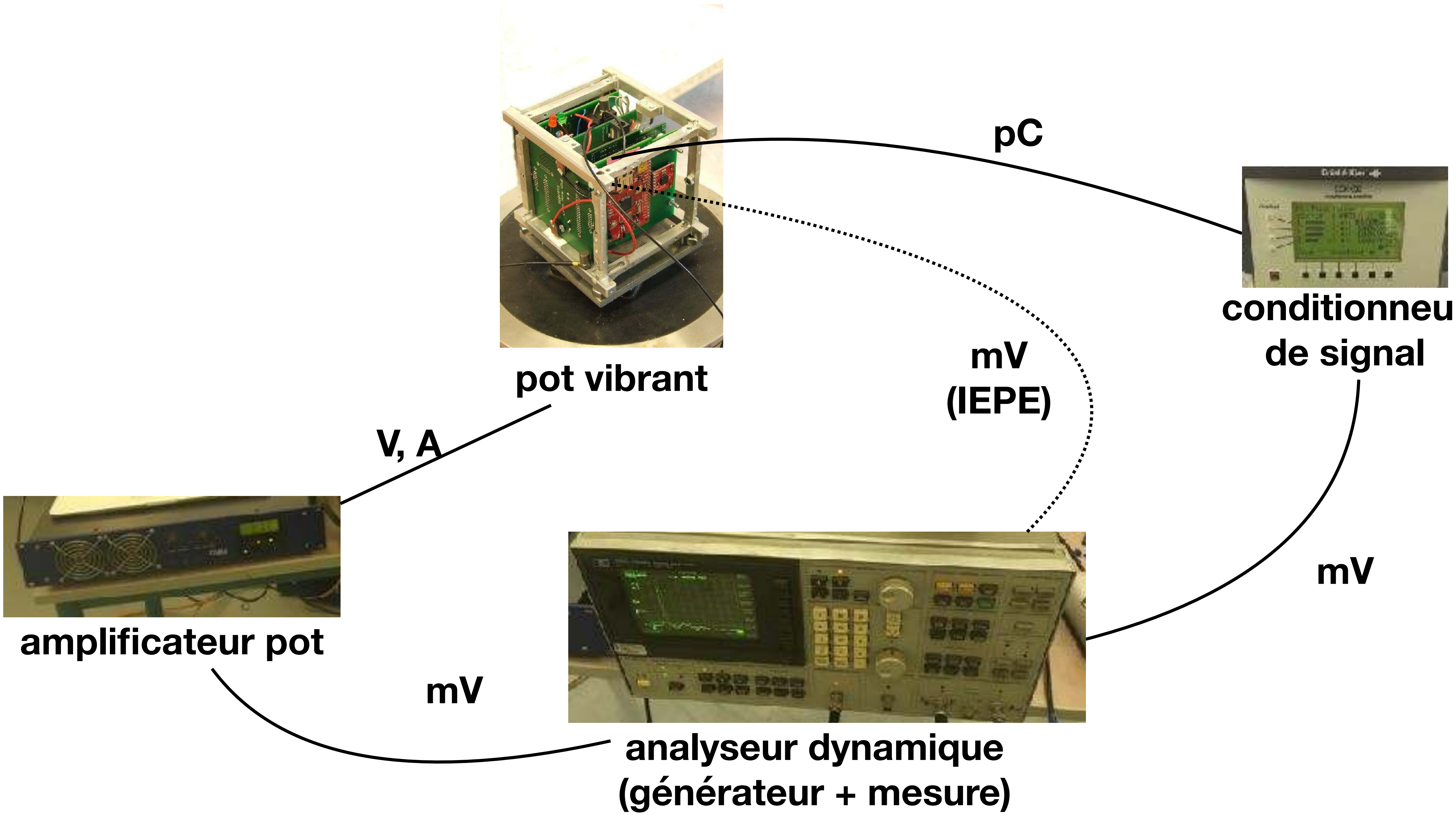


amplificateur pot

analyseur (générateur + traitement)

3.Mesures

Chaine typique de mesure et analyse



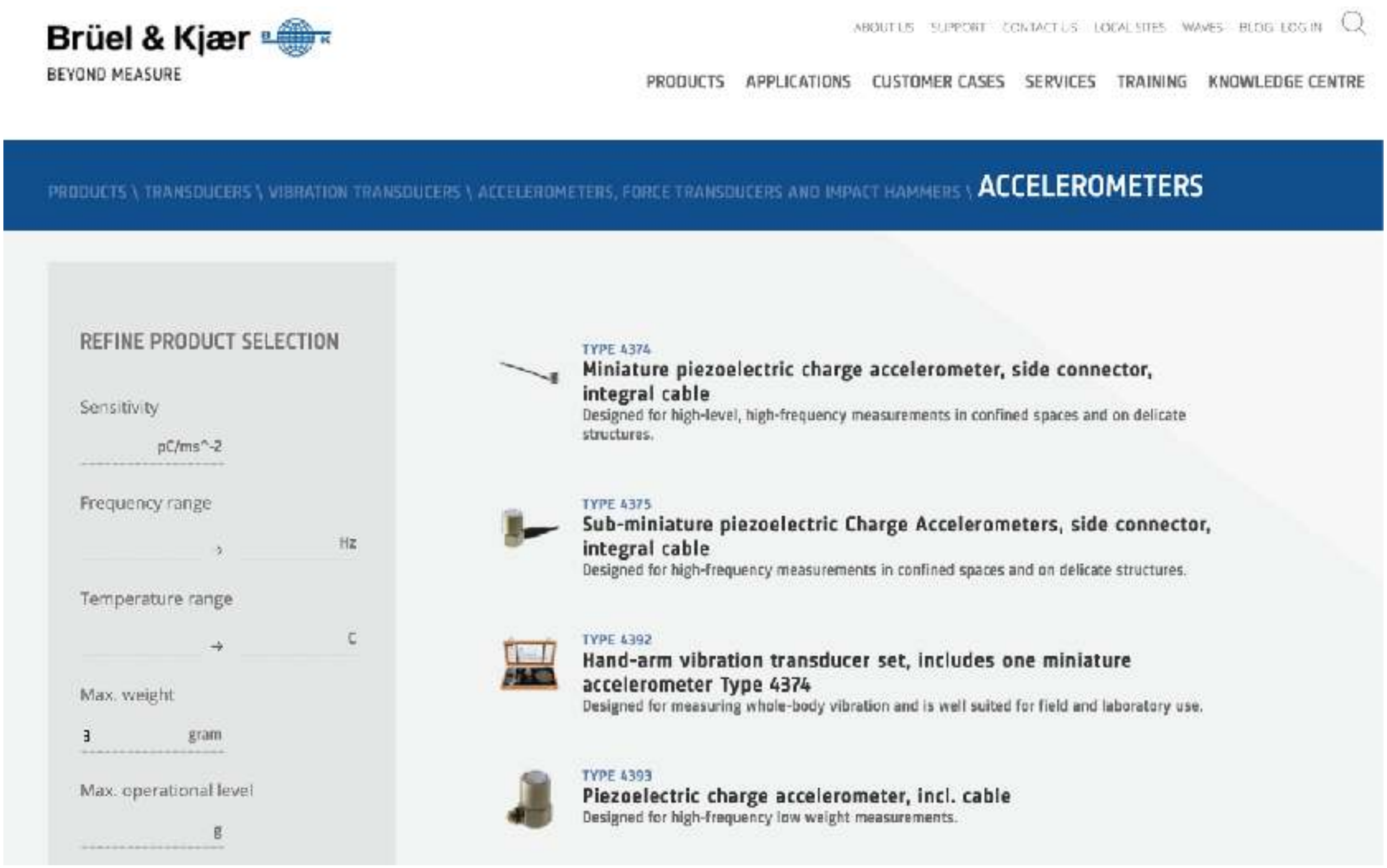
3.Mesures

capteurs

excitateur
(marteau)

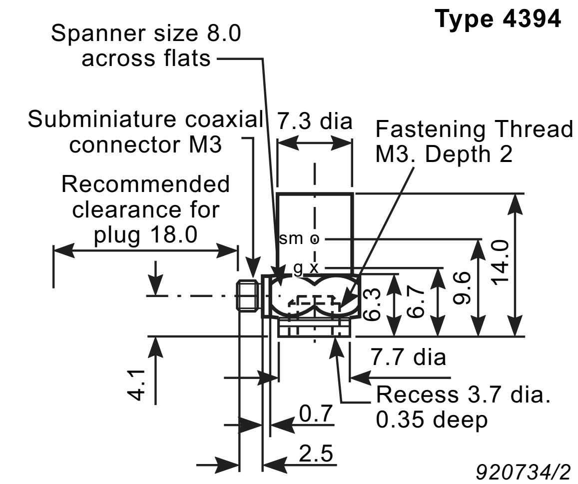
analyseur (acquisition + analyse)

3.Mesures
3.1.Capteurs



3.Mesures

3.1.Capteurs



Miniature DeltaTron® Accelerometer Types 4394 and 4397-A

Piezoelectric Accelerometers

Features

- High frequency
- High sensitivity-to-mass ratio

Description

Types 4394 and 4397-A are piezoelectric DELTA-SHEAR® Unigain accelerometers with side connectors. Both transducers feature an M3 connection and can be mounted on the measurement object by means of an M3 threaded steel stud. The two types differ from each other in that Type 4394 has a ceramic isolated base.

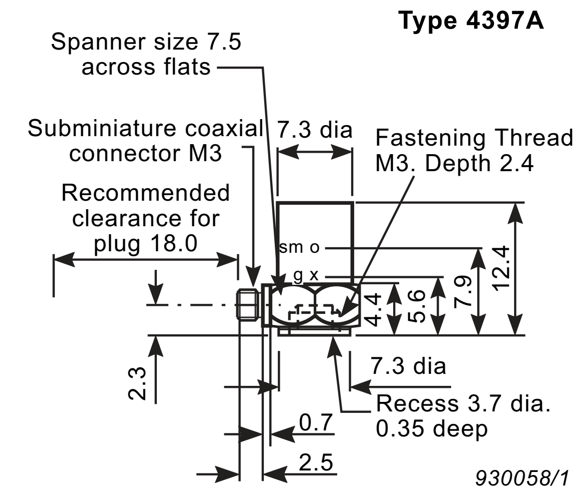
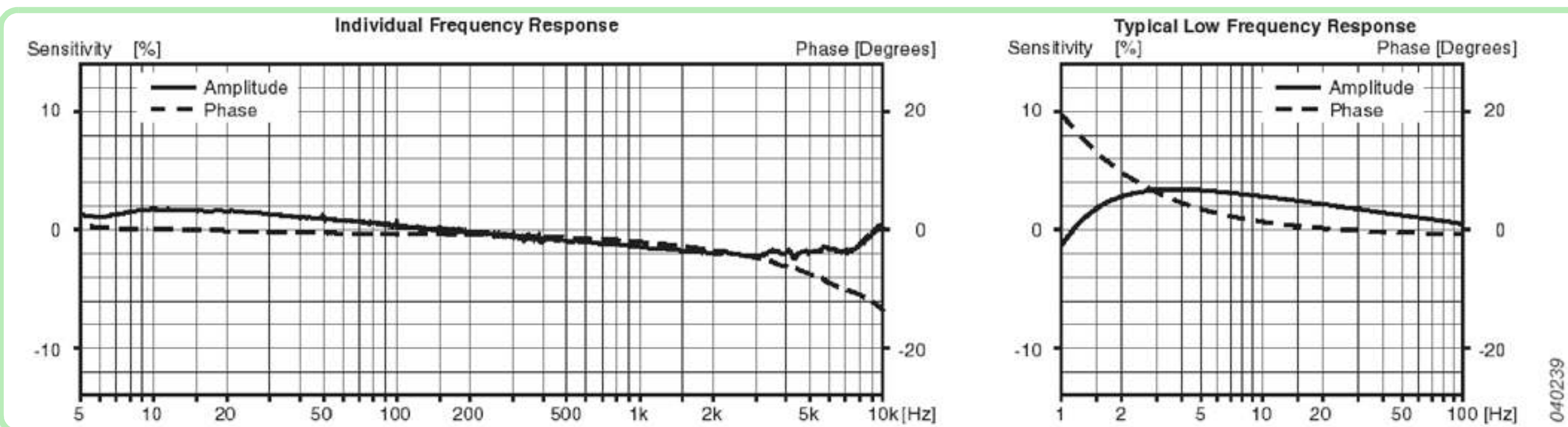


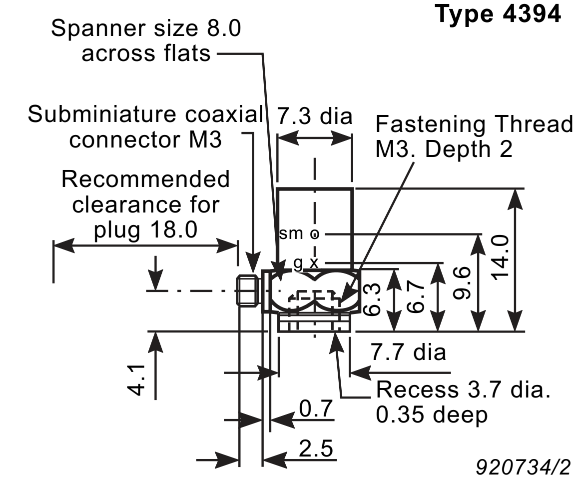
Fig. 1 *Frequency response curves for Types 4394 and 4397-A*



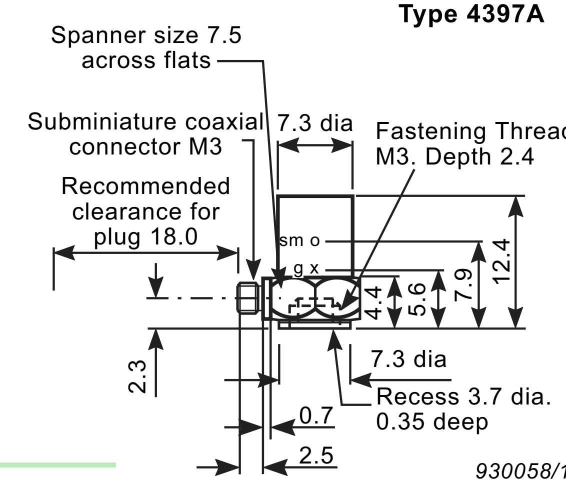
Brüel & Kjær

3.Mesures
3.1.Capteurs

Type 4394



Type 4397A



Miniature DeltaTron® Accelerometer Types 4394 and 4397-A

Piezoelectric Accelerometers

Features
- High frequency
- High sensitivity-to-mass ratio

Description

Types 4394 and 4397-A are piezoelectric DELTA-SHEAR® Unigain accelerometers with side connectors. Both transducers feature an M3 connection and can be mounted on the measurement object by means of an M3 threaded steel stud. The two types differ from each other in that Type 4394 has a ceramic isolated base.

Specifications – Types 4394 and 4397-A*

	Unit	4394	4397-A
Dynamic Characteristic			
Charge Sensitivity (@ 160.2 Hz)	mV/ms^{-2}	1.0 ±2%†	
Measuring Range	g	± 500	
Frequency Response		See typical amplitude response	
Mounted Resonance Frequency	kHz	52	53
Amplitude Response ±10%	Hz	1 to 25000	
Residual Noise	mg	1.5	
Transverse Sensitivity	%	<4	

3.Mesures
3.2.Excitateur

Deux types :

- **Hydraulique**:
    - basse fréquence
    - grande course
    - grande force

- **Electrodynamique** :
    - haute fréquence
    -

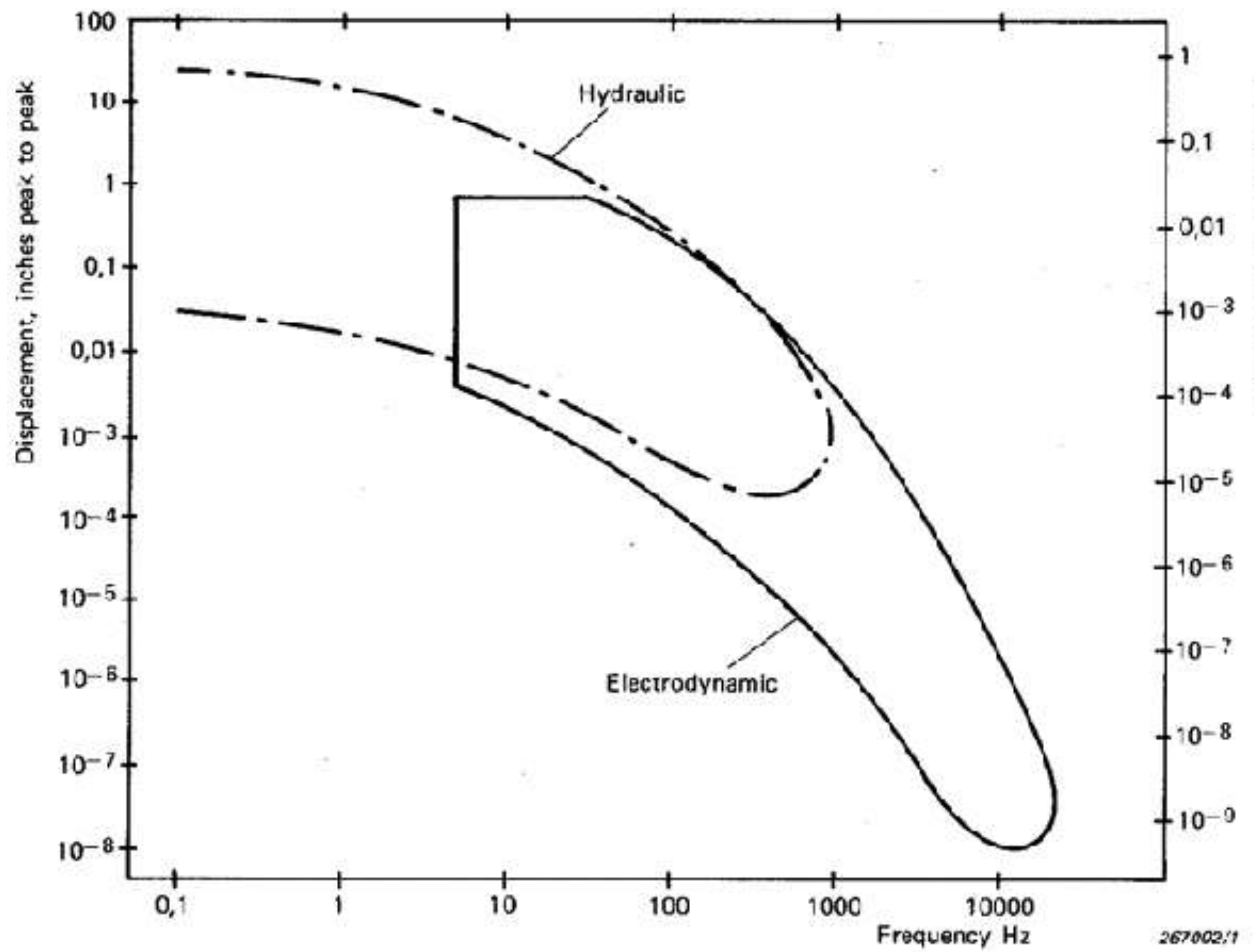
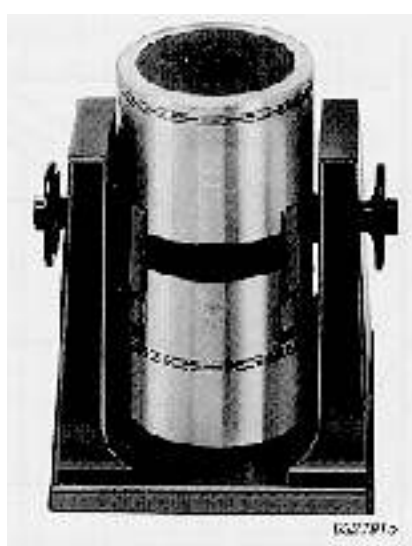


Fig.10.1. Useful operating regions of modern hydraulic and electro-dynamic vibration machines (after G.B. Booth)

3.Mesures
3.2.Excitateur

100 N

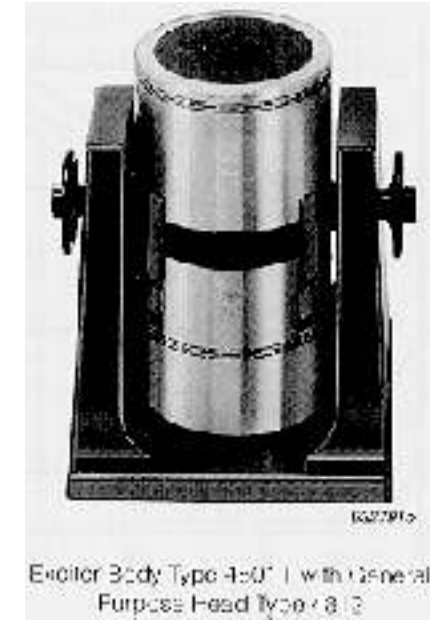


Exciter Body Type [illegible] with General Purpose Head Type [illegible]

500 N - 12 mm pp

50 kN - 100 mm pp

3.Mesures
3.2.Excitateur



BF : limite en déplacement
$acc = x_{max} * w^2$

MF : limite en déplacement

HF : limite en force
$acc_{max} = F_{max}/m$

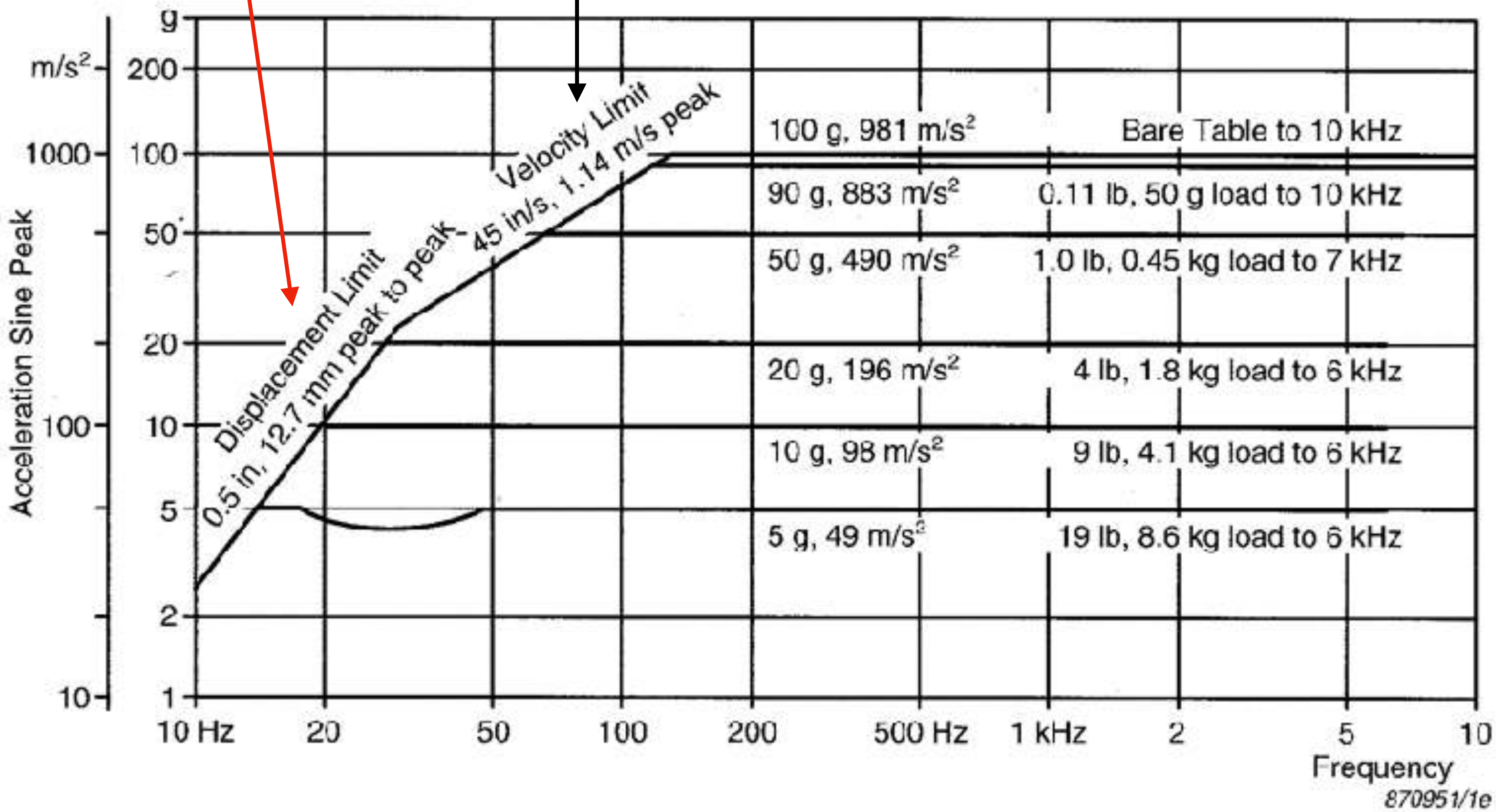
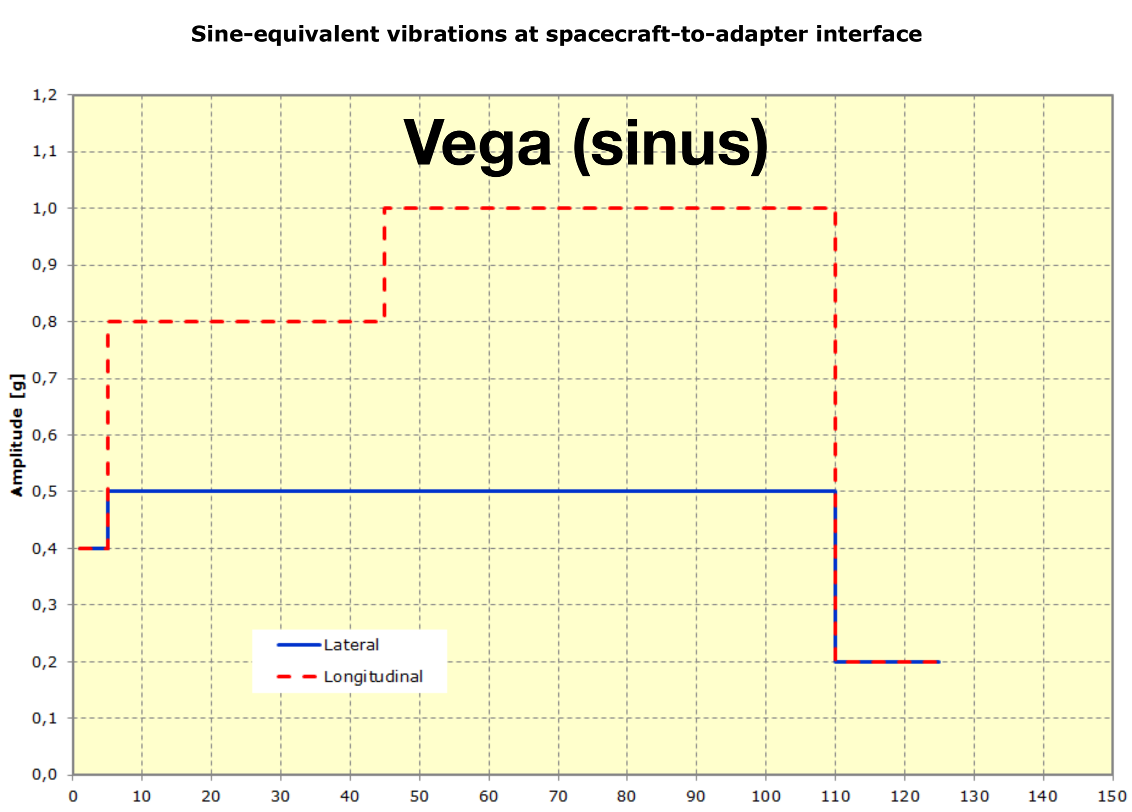


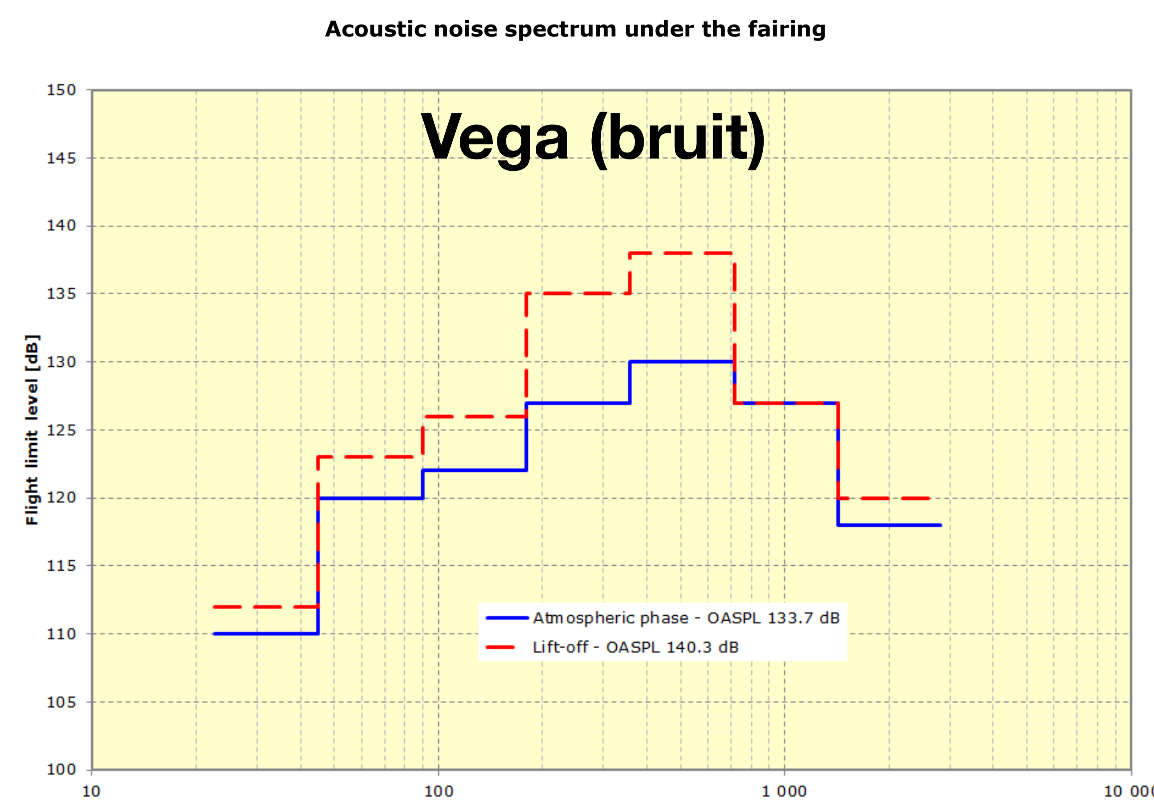
Fig.3 Sine performance, General Purpose Head Type 4812 and Exciter Body Type 4801

4.Essais

Le paramètre couramment utilisé pour définir le mouvement d'un sytème mécanique est **l'accélération**.

- Unité : m.s^{-2} ou g (= 9,81 m.s^{-2})
- Domaine typique pour les structures spatiales : 0.01 g to 10,000 g.
- Domaine de fréquences : 0-200 Hz (sinus = résonances structure), 20-2000 Hz (aléatoire)
- Vibration aléatoire sous forme de Densité Spectrale de Puissance (g^2/Hz)
- Niveau Root Mean Square (RMS) = $\sqrt{\frac{1}{t}\int_0^t y^2 dt}$





4.Essais

- Exemple spécification qualification sinus :

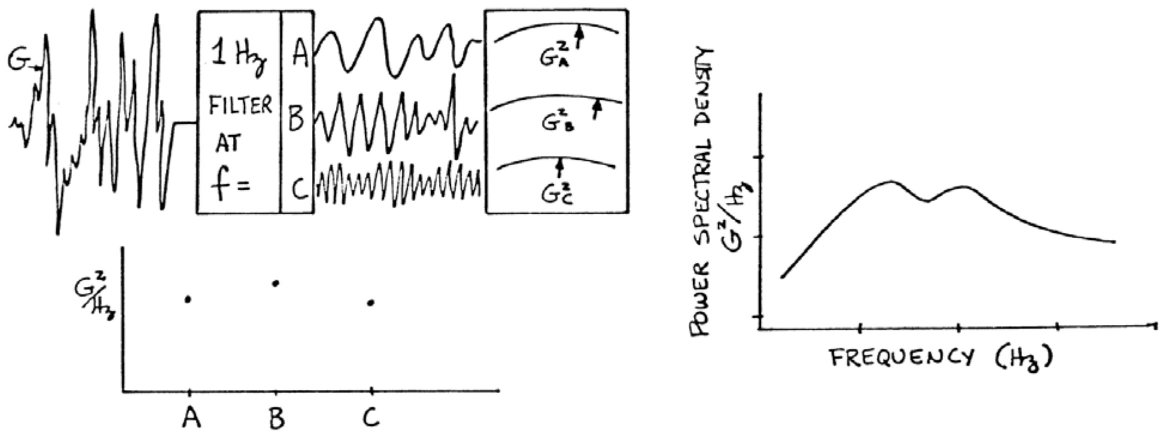
Table 7: Sinusoidal qualification test levels for equipment with first frequency > 100 Hz and mass ≤ 50 kg

Frequency	Level	Remark
(5 – 21) Hz	11 mm (0 – peak)	no notching
(21 – 60) Hz	20 g (0 – peak)	
(60 – 100) Hz	6 g (0 – peak)	

(b) For equipment with first frequency > 100 Hz and mass > 50 kg the test levels are specified in Table 8.

4.Essais

- Exemple spécification random



ECSS-E-10-03A
15 February 2002

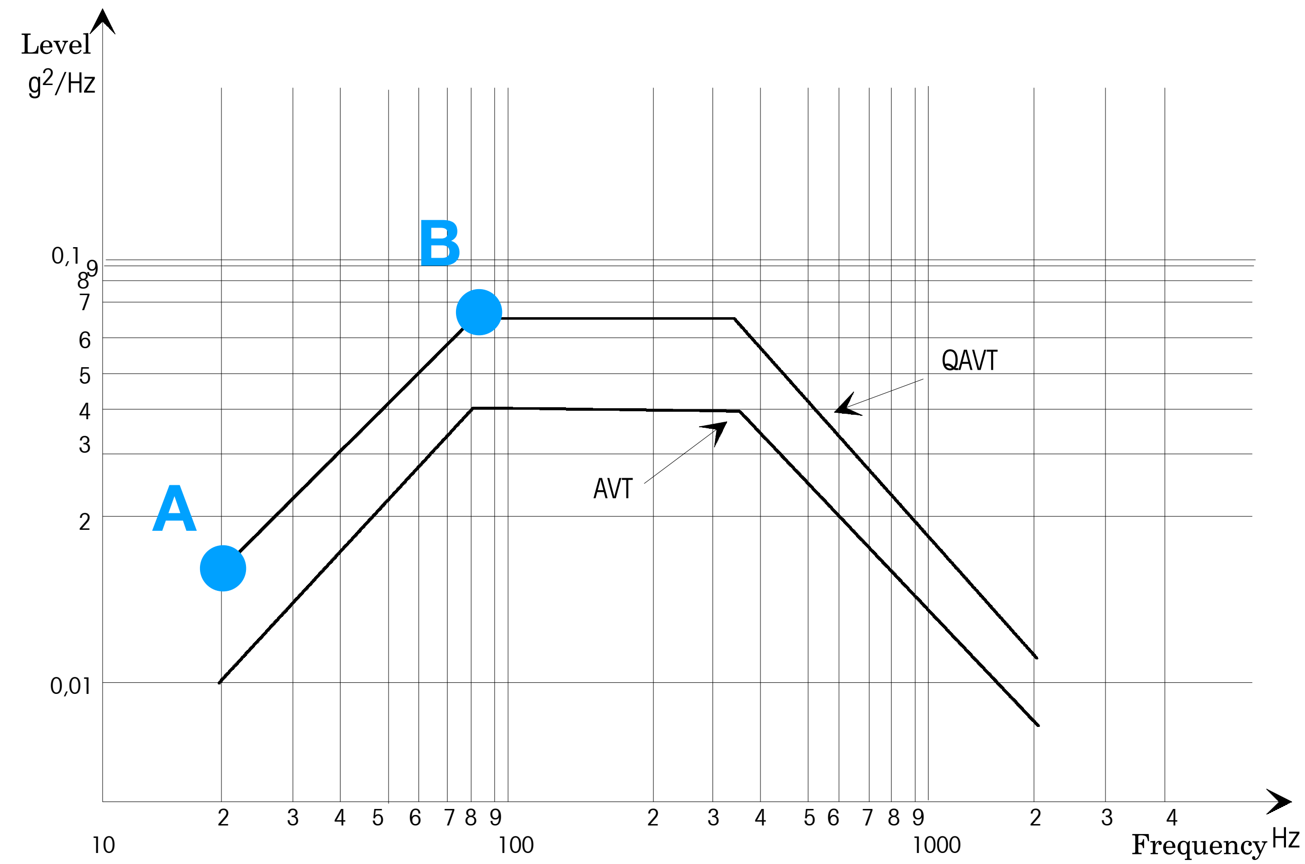


Figure A-2: Qualification and acceptance vibration test curves (QAVT/AVT)

Table A-1: QAVT and AVT levels

Frequency (Hz)	QAVT	AVT
20	0,017 g^2/Hz	0,01 g^2/Hz
20 – 80	3 dB/octave	3 dB/octave
80 – 350	0,067 g^2/Hz	0,040 g^2/Hz
350 - 2000	-3 dB/octave	-3 dB/octave
2000	0,012 g^2/Hz	0,007 g^2/Hz
Test levels (r.m.s.)	7,87 $g_{r.m.s.}$	6,06 $g_{r.m.s.}$

- **calcul niveau RMS (de A à B)**
  - $a_{AB} = \Delta f^p$ où p = $\dfrac{\log a_B - \log a_A}{\log f_B - \log f_A}$ et $\Delta = a_A f_A^p$
  - RMSAB = $\dfrac{\Delta}{p+1}(f_B^{p+1} - f_A^{p+1})$ **si p ≠ -1 ou** $\Delta(\log f_B - \log f_A)$ **si p = -1**

TD4

Traitement signal temporel dans scilab -> niveau RMS (sinus, bruit), spectre, PSD, autocorrelation, cross-correlation, calcul FRF, fit —> modèle FRF

Références

- ECSS-E-HB-32-26 - Spacecraft Mechanical Loads Analysis
- ECSS-E-10-03A - Testing
- An Introduction to Spacecraft Mechanical Loads Analysis - Adriano Calvi, PhD ESA / ESTEC, Noordwijk, The Netherlands