Exercices supplémentaires

Exercice 1

Soit A, B deux évènements sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que $\mathbb{P}(B) > 0$ et $\mathbb{P}(B^c) > 0$.

Montrer que A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$.

Montrer que si A et B sont indépendants, alors A et B^c sont également indépendants.

Corrigé : Par définition, $\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$, donc $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. D'où le résultat.

Il suffit de montrer que $\mathbb{P}(A \mid B^c) = \mathbb{P}(A)$. Pour cela, comme B et B^c sont disjoints et forme un système complet d'évènements de Ω (car $\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(B^c) = 1$), on peut utiliser la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A \mid B)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\mathbb{P}(B^c) \\ &= \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \mid B^c)\,(1 - \mathbb{P}(B))\end{aligned}$$

donc

$$\mathbb{P}(A)\,(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A \mid B^c)\,(1 - \mathbb{P}(B))$$

On en déduit que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \mid B^c)$. CQFD.

Exercice 2

On considère un dé à six faces truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face (k fois plus de chance d'obtenir k que 1). On note X la variable aléatoire qui donne le résultat du dé.

En utilisant le fait que $\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) = 1$, déterminer la loi de X puis calculer son espérance.

Corrigé : X prend les valeurs $\{1, \ldots, 6\}$. De plus, on sait que

$$\mathbb{P}(X = k) = k \times \mathbb{P}(X = 1).$$

Ainsi, il suffit de déterminer $\mathbb{P}(X=1)$. Or,

$$1=\sum_{k=1}^{6}\mathbb{P}(X=k)=\mathbb{P}(X=1)\sum_{k=1}^{6}k=\mathbb{P}(X=1)\times 21.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X=1)=\frac{1}{21}$ et donc $\mathbb{P}(X=k)=\frac{k}{21}$.

Pour calculer $\mathbb{E}[X]$, on applique la formule de base :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X]&=\sum_{k=1}^{6}k\mathbb{P}(X=k)\\&=\frac{1}{21}\sum_{k=1}^{6}k^2\\&=\frac{1}{21}\left(1+4+9+16+25+36\right)\\&=\frac{91}{21}=\frac{13}{3}\end{aligned}$$