Département de Mécanique
Faculté des Sciences

Examen – session 1
12 janvier 2024

HAY501Y : Résistance des matériaux

L3 Mécanique
STM & CUPGE

Durée 2h

Aucun document autorisé. Calculette, smartphone, ordinateur, etc., <u>interdits</u>. Les deux exercices sont indépendants. Pour l'exercice 2, les deux premières parties sont indépendantes. L'appréciation tiendra compte de la clarté et de la lisibilité des réponses aux différentes questions. Nous attendons de vous une rédaction claire et synthétique qui, en aucun cas, ne pourra se borner à une suite d'expressions mathématiques sans justification ni à des acronymes et autres abréviations sans explication.

<u>Exercice 1</u> : Modélisation RdM en vue de dimensionner la planche d'un plongeoir de piscine

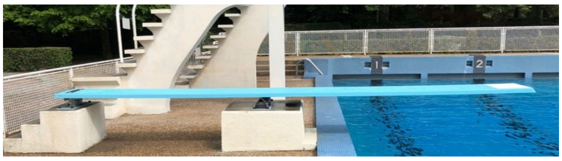


Figure 1 : La planche du plongeoir à dimensionner

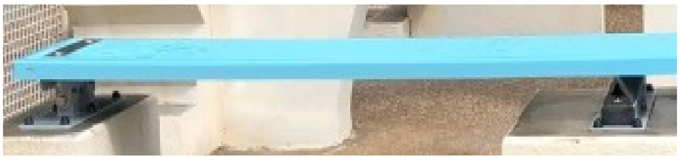


Figure 2 : Zoom de la partie arrière de la planche du plongeoir

On souhaite dimensionner <u>la planche</u> d'un plongeoir de piscine (cf. Fig. 1) composée d'un matériau isotrope, homogène, de module de Young E, de masse volumique ρ, de longueur L, de largeur b et d'épaisseur h. La figure 2 est un agrandissement de la figure 1 permettant de voir les liens entre la planche et le bâti. Pour cela, il vous est demandé de proposer une modélisation RdM 2D. Deux situations sont à considérer, à savoir : le cas 1 considérera qu'au bout de la planche au-dessus de l'eau il y a une fourmi prête à plonger, tandis que le cas 2 considérera qu'à la place de la fourmi il y a Obélix prêt à plonger. **Le problème sera considéré comme isostatique**. Pour vos modélisations de ces deux situations, il vous est demandé de faire :

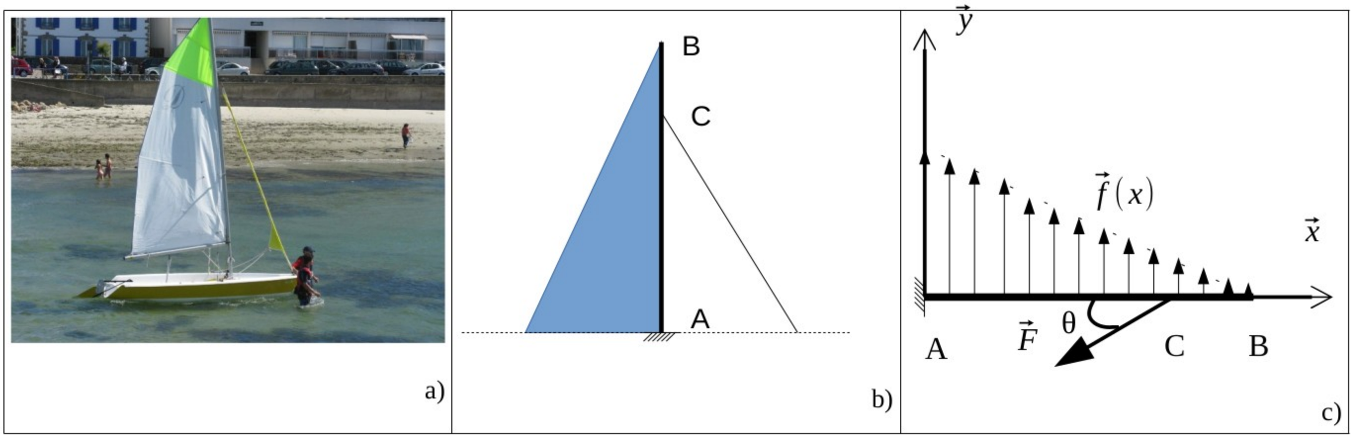
- un schéma et un repérage complets
- nommer et rajouter toutes les paramètre correspondants non indiqués dans l'énoncé ci-dessus
- indiquer les hypothèses de travail (bilan des efforts…)

Cas 1 :

Cas 2 :

<u>Exercice 2</u> : Étude du mât d'un dériveur

« Maman, les p'tits bateaux qui vont sur l'eau ont-ils des ailes ? »… Grande question à laquelle la réponse est plus incertaine qu'il n'y paraît (les « foils »…). En revanche, ce qui est certain c'est que les voiliers possèdent un ou plusieurs mâts dotés d'une ou plusieurs voiles et de différents cordages pour le maintient de l'ensemble (exemple, figure 3a). L'objectif ici est ainsi d'étudier un tel mât, simplifié via une modélisation (grossière) par la RdM (voir figure 3c). Le mât en question sera supposé ne posséder d'un côté qu'une seule voile triangulaire supportant l'action du vent et qu'un unique cordage tendu de l'autre côté côté (cf. figure 3b). Pour des raisons de simplification, la voile sera supposée accrochée sur toute la longueur du mât lequel est considéré comme encastré à sa base au reste du bateau. Les figures ci-après montrent la modélisation correspondante.



<u>Figure 3</u> : (a) Photo d'un petit voilier appelé « dériveur » (source : https://www.nautic-sport.com), (b) schéma simplifié du mât étudié et (c) modèle RdM associé avec bascule de -90° par rapport à (b) pour éviter de complexifier…

On assimilera ainsi le mât à une poutre AB orientée par le vecteur $\vec{x}$, de longueur L, de section S et encastrée au point A d'abscisse 0 (cf figure 3c). **La résultante des efforts de cette liaison sera notée** $\vec{R}_A = X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y}$ **et le moment de liaison sera noté** $\vec{M}_A = M_A.\vec{z}$. Afin de représenter l'action du vent au travers de la voile triangulaire, on considère une charge répartie sur l'ensemble de la poutre $\vec{f}(x) = f(x)\,\vec{y}$ avec f(x)=a·(L – x) où a est une constante quelconque strictement positive. L'action exercée par le cordage sera représentée par la force $\vec{F}$, de norme F, de point d'application C (x_c) et faisant un angle θ avec l'axe des abscisses tel que représenté sur la figure 3c. Dans toute l'étude, on négligera le poids propre du mât, de la voile et du cordage. Le problème est supposé plan (2D). On notera E le module de Young du matériau de la poutre. Le repère de travail sera le repère cartésien centré en A tel que représenté en figure 3c. **L'effort normal sera noté N, l'effort tranchant sera noté T et le moment fléchissant sera représenté par M**.

Dans ce qui suit, on appellera « cas 1 » la situation où seule la charge répartie $\vec{f}(x)$ s'exerce, « cas 2 » celle où seule la force $\vec{F}$ s'applique et « cas 3 » lorsque la poutre est soumise aux deux charges ($\vec{f}(x)$ et $\vec{F}$) en même temps. Les parties I et II sont indépendantes l'une de l'autre. La partie III, qui est une question bonus, fait naturellement appel aux deux autres.

Précaution : veillez à bien distinguer les efforts (de liaison et de cohésion) pour chaque cas étudié, par un indice ou un exposant entre parenthèses approprié (par exemple : effort tranchant cas 1 : T_1 ou $T^{(1)}$ ou autre notation à définir dans vos réponses ; moment fléchissant cas 2 : M_2 ou $M^{(2)}$ ou…).

Questions :

Partie I : Cas 1 (charge répartie)

I-1. Écrire les équations scalaires d'équilibre local correspondant à cette situation

I-2. Écrire les conditions limites scalaires en efforts

I-3. Résoudre les équations d'équilibre de la question I-1 pour déterminer l'ensemble des efforts de liaison et des efforts de cohésion

I-4. Écrire les conditions limites en déplacement

I-5. A partir de l'équation différentielle en $v_1''(x)$, montre que l'expression de la flèche pour tout point de la poutre s'écrit : $v_1(x) = -\dfrac{a}{120\,E\,I}\left[(x-L)^5 - 5L^4x + L^5\right]$

Partie II : Cas 2 (force ponctuelle)

II-1. Écrire les conditions limites <u>scalaires</u> en effort ainsi que les équations <u>scalaires</u> de saut et de raccord en efforts pour ce cas

II-2. Écrire les équations <u>scalaires</u> d'équilibre local pour chaque zone d'étude

II-3. Résoudre les équations d'équilibre de la question II-2 pour déterminer l'ensemble des efforts de liaison et des efforts de cohésion pour chaque zone d'étude

II-4. En utilisant une méthode énergétique, déterminer le déplacement vertical $v_2(3L/4)$ du point C

Partie III – Question BONUS : Cas 3 (les deux charges ensembles) : Montrer que, pour que le déplacement vertical total du point C soit nul ($v(x_c=3L/4)=0$), il faut que $\sin(\theta)$ dépende du rapport a/L