

Modélisation:

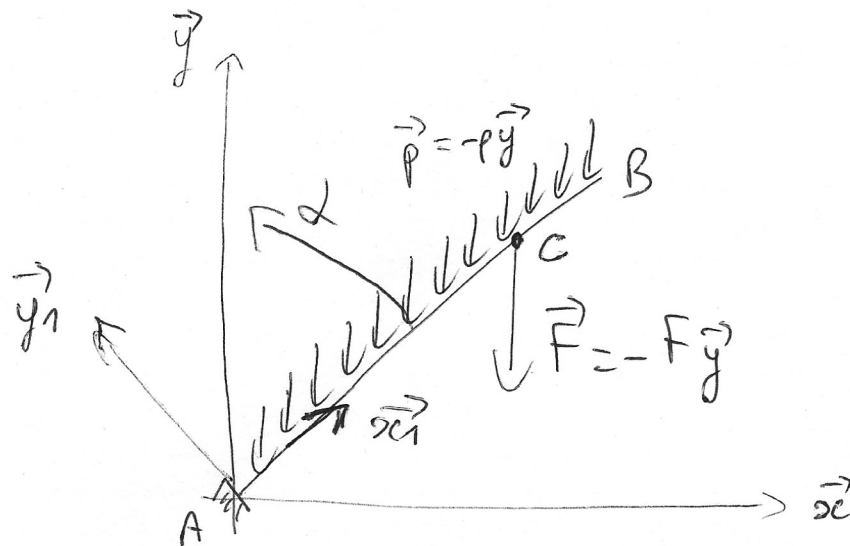
• Système étudié: poutre (AB)

• Repère de travail:

$$R_1 = (A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1 = \vec{z})$$

avec:

$$A(0); B(L); C(x_c)$$



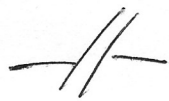
• Liaison encastrement en A: $\mathcal{L}_A = \left\{ \begin{matrix} x_A; y_A \\ \pi_A \end{matrix} \right\}_{A(R_1)} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_A \\ \vec{\pi}_A \end{matrix} \right\}_{A(R_1)}$

$$\vec{y} = \cos \alpha \vec{x}_1 + \sin \alpha \vec{y}_1$$

$$\text{d'où } \vec{p} = -p\vec{y} = -p \cos \alpha \vec{x}_1 - p \sin \alpha \vec{y}_1$$

$$\vec{F} = -F\vec{y} = -F \cos \alpha \vec{x}_1 - F \sin \alpha \vec{y}_1$$

• extrémité B libre de tout effort: $\mathcal{L}_B = \left\{ \begin{matrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{B(R_1)}$



Partie 1: poids propre du tronç uniquement

1. Détermination des efforts de liaison en A:

Pour cela, on applique le PFS à la poutre (AB), soit:

$$\left\{ \begin{matrix} \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \\ \sum \vec{\pi}_A(\vec{F}_{ext}) = \vec{0} \end{matrix} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{A1} + \int_0^L \vec{p} \, dx = \vec{0} \quad (1) \\ \vec{\pi}_{A1} + \int_0^L \vec{AG} \wedge \vec{p} \, dx = \vec{0} \quad (2) \end{matrix} \right.$$

avec $G = G(x) \in [A; B]$

$$(1) \Rightarrow \vec{R}_A = p \int_0^L \cos \vec{y} = pL \vec{y} = pL \cos \vec{u}_1 + pL \sin \vec{y}_1$$

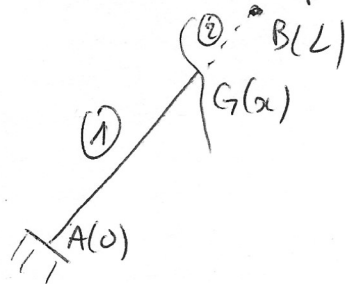
donc : $\boxed{X_{A1} = pL \cos \alpha}$ et $\boxed{Y_{A1} = pL \sin \alpha}$

$$(2) \Rightarrow \vec{\Pi}_A = p \int_0^L x \vec{u}_1 \wedge \vec{y} \, dx = p \frac{L^2}{2} \sin \alpha \vec{z}$$

d'où : $\boxed{\Pi_{A1} = \frac{pL^2}{2} \sin \alpha}$

2° - Détermination des efforts de cohésion (N_1, T_1, Π_1) :

Pour cela, on procède à une coupe en un point quelconque $G(x) \in]A; B[$



On note (1) la portion de poutre entre A et G, et (2) la seconde portion de poutre et on applique le PFS à (1) avec :

$$\mathcal{L}_A = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_A \\ \vec{\Pi}_A \end{array} \right\}_{A(R_1)} \quad (\text{cf question 1°}) \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_G = \left\{ \begin{array}{l} \vec{R}_G = N_1 \vec{u}_1 + T_1 \vec{y}_1 \\ \vec{\Pi}_G = \Pi_1 \vec{z} \end{array} \right\}_{G(R_1)}$$

Ainsi :

$$\left\{ \vec{R}_G + \vec{R}_A + \int_0^x -p \vec{y} \, dx = \vec{0} \right. \quad (A)$$

$$\left. \left\{ \vec{\Pi}_G + \vec{\Pi}_A + \vec{G} \wedge \vec{R}_A + \int_0^x (-x) \vec{u}_1 \wedge (p) \vec{y} = \vec{0} \right. \right. \quad (B)$$

$$(A) \Rightarrow \vec{R}_G = -\vec{R}_A + p x \vec{y} = p(x-L) \vec{y} = p(x-L) [\cos \vec{u}_1 + \sin \vec{y}_1]$$

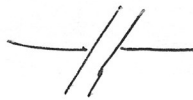
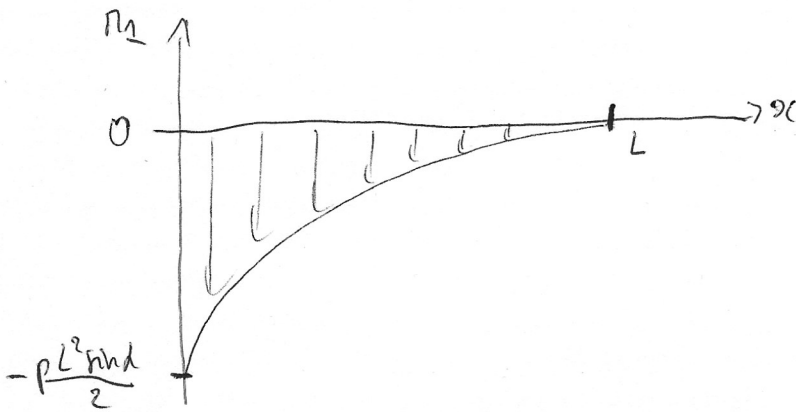
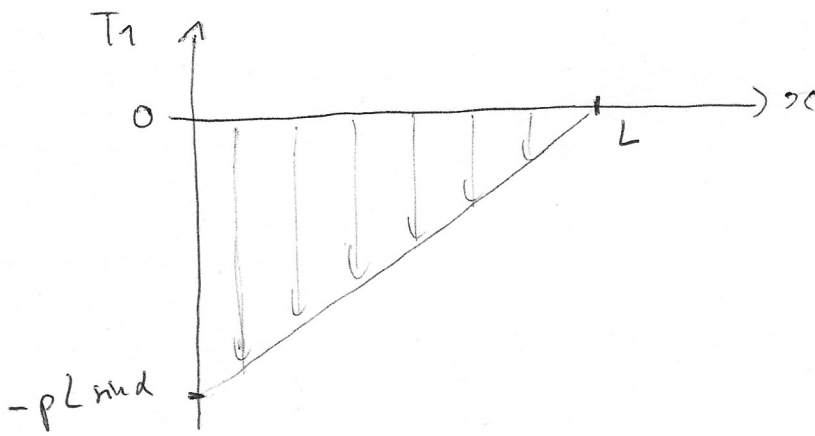
d'où : $\boxed{N_1 = p(x-L) \cos \alpha}$ et $\boxed{T_1 = p(x-L) \sin \alpha}$

$$\textcircled{B} \Rightarrow \vec{\Pi}_G = -\vec{\Pi}_{A_1} + \underbrace{\vec{AG} \wedge \vec{R}_{A_1}}_{xL \sin \alpha \vec{z}} - p \int_0^L x \sin \alpha \vec{z} = -p \sin \alpha \frac{x^2}{2} \vec{z}$$

d'où : $\vec{\Pi}_G = p \sin \alpha \left(-\frac{L^2}{2} + xL - \frac{x^2}{2} \right) \vec{z} = -p \frac{\sin \alpha}{2} (x-L)^2 \vec{z}$

Ainsi $\Pi_2 = -\frac{p \sin \alpha}{2} (x-L)^2$

3. Diagrammes de T1 et M1 en fonction de x



Partie 2: poids du trouppier uniquement

10) Détermination des efforts de la liaison en A:

Pour cela, on applique le PFS à la poutre (AB), avec:

$$\mathcal{L}_A = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{A_2} \\ \vec{\Pi}_{A_2} \end{matrix} \right\}_{A(R_1)} ; \quad \mathcal{L}_C = \left\{ \begin{matrix} -F \vec{y} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{C(R_1)} \quad \text{et } C = C(xcc)$$

(4)

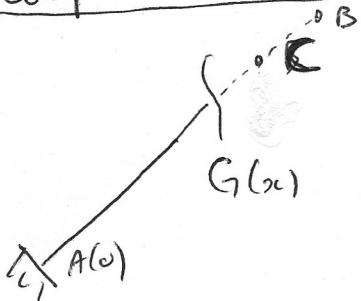
Ainsi:
$$\begin{cases} \vec{R}_{A2} + \vec{F} = \vec{0} \\ \vec{\Pi}_{A2} + \vec{AC} \wedge \vec{F} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{R}_{A2} = -\vec{F} = F \vec{y} \\ \vec{\Pi}_{A2} = -\vec{AC} \wedge \vec{F} = x_c F \sin \alpha \vec{z} \end{cases}$$

d'où:
$$X_{A2} = F \cos \alpha ; Y_{A2} = F \sin \alpha \text{ et } \Pi_{A2} = x_c F \sin \alpha$$

d - Détermination des efforts de cohésion N_2, T_2 et Π_2

Pour cela, on coupe la poutre (AB) en deux portions. Je choisis l'option des 2 coupures (bien que non nécessaire... cf plus loin).

a) Coupure entre A et C



On isole la portion (AG) et on en étudie l'équilibre statique (PFS), avec:

$$\mathcal{L}_A = \begin{cases} \vec{R}_{A2} \\ \vec{\Pi}_{A2} \end{cases} \Big|_{A(R_1)} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_G = \begin{cases} N_2 \vec{x}_G + T_2 \vec{y}_G \\ \Pi_2 \vec{z} \end{cases} \Big|_{G(R_2)}$$

" "

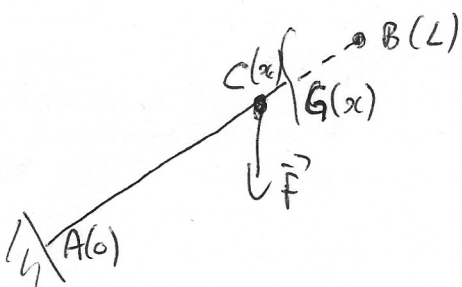
$$\begin{cases} \vec{R}_G \\ \vec{\Pi}_G \end{cases} \Big|_{G(R_1)}$$

Ainsi:
$$\begin{cases} \vec{R}_{A2} + \vec{R}_G = \vec{0} \\ \vec{\Pi}_{A2} + \vec{\Pi}_G + \vec{GA} \wedge \vec{R}_{A2} = \vec{0} \end{cases}$$

d'où:
$$\begin{cases} \vec{R}_G = -\vec{R}_{A2} = -F \vec{y} \\ \vec{\Pi}_G = -\vec{\Pi}_{A2} + \vec{AG} \wedge \vec{R}_{A2} \end{cases} \quad \text{soit:} \quad \begin{cases} \vec{R}_G = -F \cos \alpha \vec{y} - F \sin \alpha \vec{y} \\ \vec{\Pi}_G = F \sin \alpha (x_c - x_G) \vec{z} \end{cases}$$

donc:
$$N_2 = -F \cos \alpha ; T_2 = -F \sin \alpha \text{ et } \Pi_2 = F \sin \alpha (x_c - x_G)$$

b) Coupure entre C et B



Même démarche, avec:

$$\mathcal{L}_G = \begin{cases} \vec{R}_G^+ = N_2^+ \vec{x}_G + T_2^+ \vec{y}_G \\ \vec{\Pi}_G^+ = \Pi_2^+ \vec{z} \end{cases} \Big|_{G(R_1)}$$

$$\mathcal{L}_A = \begin{cases} \vec{R}_{A2} \\ \vec{\Pi}_{A2} \end{cases} \Big|_{A(R_1)} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_C = \begin{cases} \vec{F} \\ \vec{0} \end{cases} \Big|_{C(R_2)}$$

L'application du PFS à (AG) donne:

(5)

$$\begin{cases} \vec{R}_G^+ + \vec{R}_{A_2} + \vec{F} = \vec{0} & \text{mais } \vec{R}_{A_2} = -\vec{F} \quad (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{\Pi}_G^+ + \vec{\Pi}_{A_2} + \vec{GA} \wedge \vec{R}_{A_2} + \vec{GC} \wedge \vec{F} = \vec{0} \quad (**) \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} \vec{R}_G^+ = \vec{0} \\ \vec{\Pi}_G^+ = -\vec{\Pi}_A + \vec{AG} \wedge \vec{R}_{A_2} + \vec{CG} \wedge \vec{F} \end{cases}$$

\parallel \parallel \parallel
 $-x_C F \text{ mnd}$ $x F \text{ mnd}$ $-F(x_C - x_G) \text{ mnd}$

Ainsi $\begin{cases} \vec{R}_G^+ = \vec{0} \\ \vec{\Pi}_G^+ = \vec{0} \end{cases}$ soit $\boxed{N_2^+ = T_2^+ = \Pi_2^+ = 0}$

Remarque: pour un tel cas (pas de liaison ou effort extérieur à l'extrémité B), il est inutile de faire cette méthode des 2 coupures car tous les efforts extérieurs (ici la force \vec{F} en C) se transmettent jusqu'à la liaison en A et il n'y a pas d'effort intérieur entre C et B (tout se passe entre A et C). Ainsi, plutôt que de faire la 2^e coupure, il est possible de facilement arriver à ce résultat en étudiant l'équilibre statique (PFS) à la portion (2) issue de la première coupure, avec

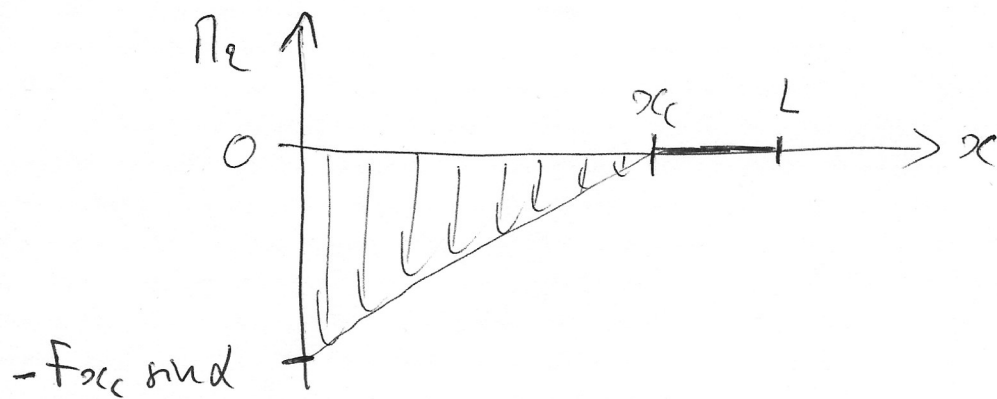
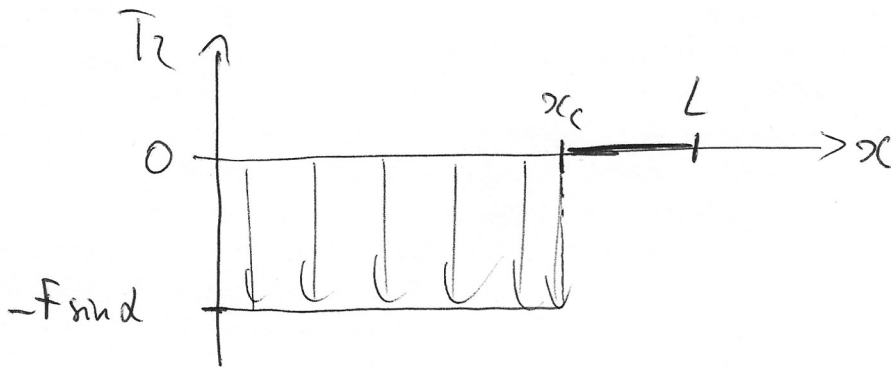
$$\mathcal{L}_C = \left\{ \begin{matrix} \vec{F} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{/C} \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_G = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}_{G_2}^+ = -N_2^+ \vec{x}_1 - T_2^+ \vec{y}_1 \\ \vec{\Pi}_{G_2}^+ = -\Pi_2^+ \vec{z}_1 \end{matrix} \right\}_{/G}$$

Le fait qu'il ne se passe rien entre C et B (en termes d'efforts de cohésion) se voit également rapidement avec les relations (*) et (**). En effet, la question 1°) montre que $\vec{R}_{A_2} = -\vec{F}$ donc qu'il ne peut plus rien y avoir comme effort intérieur entre B et C ($\vec{R}_{G_2}^+ = \vec{0}$). De même pour $\vec{\Pi}_{A_2}$ qui équilibre déjà

le moment global créé par \vec{F} ...

(6)

3 - Diagrammes de T_2 et Π_2 en fonction de x



-//-

Partie 3: les deux chargements ensemble

Le principe à appliquer ici est le principe de superposition entre les parties 1 et 2 précédentes. Pas de nouveau calcul à faire !

1 - Détermination des efforts intérieurs complets N , T et Π

D'après le principe de superposition, on a :

$$\underline{0 < x < x_c}: \begin{cases} N^- = N_1 + N_2^- \\ T^- = T_1 + T_2^- \\ \Pi^- = \Pi_1 + \Pi_2^- \end{cases} \quad \text{et} \quad \underline{x_c < x < L}: \begin{cases} N^+ = N_1 + N_2^+ = N_1 \\ T^+ = T_1 + T_2^+ = T_1 \\ \Pi^+ = \Pi_1 + \Pi_2^+ = \Pi_1 \end{cases}$$

Ann: $0 < x < x_c$

$$N^- = [p(x-L) - F] \cos \alpha$$

$$T^- = [p(x-L) - F] \sin \alpha$$

$$\Pi^- = \frac{p \sin \alpha (x-L)^2}{2} + F \sin \alpha (x-x_c)$$

$x_c < x < L$

$$N^+ = p(x-L) \cos \alpha$$

$$T^+ = p(x-L) \sin \alpha$$

$$\Pi^+ = \frac{p \sin \alpha (x-L)^2}{2}$$

9

2° - Diagrammes de T et Π en fonction de x

