
Durée 1h

Aucun document autorisé. Calculatrice, smartphone, ordinateur, etc., interdits. Les deux premières parties sont indépendantes. L'appréciation tiendra compte de la clarté et de la lisibilité des réponses aux différentes questions. Nous attendons de vous une rédaction claire et synthétique qui, en aucun cas, ne pourra se borner à une suite d'expressions mathématiques sans justification ni à des acronymes et autres abréviations sans explication.

Étude de la résistance d'un arbre penché

Sur des terrains accidentés ainsi que dans des régions où les vents dominants sont intenses et fréquents, il n'est pas rare de rencontrer des arbres qui poussent non pas à la verticale mais suivant un angle (noté α dans la suite du problème) entre celle-ci et le tronc (cf figure 1). C'est un genre de situation qu'il peut être important d'étudier afin de prévenir un éventuel accident (chute totale de l'arbre, rupture du tronc...). L'objectif de ce problème est de procéder aux premières étapes d'une telle étude de résistance, par la détermination des efforts de liaisons et de cohésion en jeu, via une modélisation RdM.



Figure 1 :
Exemple d'un arbre ayant grandi «penché» par rapport à la verticale.

(<http://www.maclape.com/>)

Le problème présent va être divisé 2 parties distinctes : la partie 1 concernera uniquement le poids propre du tronc et la partie 2 concernera uniquement le poids du houppier (c'est à dire l'ensemble des branches et du feuillage vers le haut du tronc). Une 3^e partie considérera la mise en commun des parties 1 et 2 pour déterminer les expressions finales pour la situation complète.

Dans les trois parties ci-après, on considérera un repère global $R=(A, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ avec \vec{x} définissant l'axe horizontal. Un repère de travail $R_1=(A, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ lié à l'arbre sera également considéré. Ces deux repères sont tels que la verticale est définie par le vecteur \vec{y} , les vecteurs \vec{z} et \vec{z}_1 sont égaux et que α soit l'angle direct entre \vec{x}_1 et \vec{y} . Le tronc, sera assimilé à une poutre AB, orientée par le vecteur \vec{x}_1 de telle sorte qu'un point quelconque de la ligne moyenne sera repéré par l'abscisse x . La poutre est supposée encastree en A, de diamètre D et de longueur L . En première approximation, le matériau bois sera considéré comme isotrope, de module de Young E et de masse volumique constante ρ .

Partie 1 : Poids propre du tronc uniquement

Dans cette partie, le tronc de l'arbre modélisé par une poutre AB encastree en A, centre du repère R_1 , orientée par le vecteur \vec{x}_1 et soumise à une charge linéique $-\rho \vec{y}$ représentant son poids propre. Dans cette partie, l'effort normal sera noté N_1 , l'effort tranchant noté T_1 et le moment fléchissant noté M_1 .

1. Déterminer les efforts de la liaison encastrement en A (on les notera avec l'exposant ou l'indice 1 pour différentier de la partie 2)
2. Déterminer les efforts intérieurs, en particulier l'effort normal N_1 , l'effort tranchant T_1 et le moment fléchissant M_1 .
3. Tracter les diagrammes de l'effort tranchant T_1 et du moment fléchissant M_1 en fonction de l'abscisse x .

Partie 2 : Poids du houppier uniquement

Dans cette partie, le tronc de l'arbre modélisé par une poutre AB encadrée en A, centre du repère R_1 , orientée par le vecteur \vec{x}_1 et soumise à une force ponctuelle $-F\vec{y}$ modélisant la résultante du poids du houppier appliquée en son propre centre de gravité représenté par le point C d'abscisse x_c (avec $\frac{L}{2} < x_c < L$). Dans cette partie, l'effort normal sera noté N_2 , l'effort tranchant noté T_2 et le moment fléchissant noté M_2 .

1. Déterminer les efforts de la liaison encastrement en A (on les notera avec l'exposant ou l'indice 2 pour différentier de la partie 1)
2. Déterminer les efforts intérieurs, en particulier l'effort normal N_2 , l'effort tranchant T_2 et le moment fléchissant M_2 .
3. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant T_2 et du moment fléchissant M_2 en fonction de l'abscisse x .

Partie 3 : Poids propre du tronc et poids du houppier considérés ensemble

Dans cette partie, on considère la situation complète c'est à dire le tronc de l'arbre soumis à la fois à son propre poids et au poids du houppier. En appliquant un principe vu en cours :

1. Déterminer les efforts intérieurs complets, en particulier l'effort normal N , l'effort tranchant T et le moment fléchissant M .
2. Tracer les diagrammes de l'effort tranchant T et du moment fléchissant M en fonction de l'abscisse x .