Examen de rattrapage 3 février 2020
Durée 1h30 - Sans document, sans matériel

Exercice 1 (6 pts) Nous considérons un n-échantillon $X_1, \ldots, X_n$ suivant une loi exponentielle de paramètre θ. Les réalisations $x_1, \ldots, x_{n-r}$ des $(n-r)$ premières variables aléatoires ont été observées. Par contre, les réalisations des r variables aléatoires suivantes n'ont pas été observées et l'on sait seulement qu'elles ont dépassées une valeur c fixée (données censurées).
Nous supposons que le paramètre θ suit une loi Gamma de paramètres a et b hyper-paramètres connus strictement positifs.

1 (2 pts) Donner la fonction de vraisemblance.

2 (2 pts) Calculer la loi a posteriori de θ.

3 (2 pts) Donner l'estimateur bayésien de θ associé à la fonction de perte quadratique.

Exercice 2 (4 pts) Soit la densité f définie sur $[-3, 3]$ telle que

$$f(x) \propto \exp(-x^2)\,\{2 + \sin(5x) + \sin(2x)\}\,\mathbb{I}_{[-3,3]}(x)$$

Proposer une méthode de simulation suivant f basée sur l'algorithme d'acceptation-rejet. Écrire la fonction `R` associée admettant pour entrée le nombre N de simulations et comme sorties les N réalisations indépendantes.

Exercice 3 (5 pts) On souhaite estimer l'intégrale

$$I = \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\exp(-x)}{(1+x)} \sin(x) \right\} \mathrm{d}x\,.$$

1 (2 pts) Proposer deux méthodes Monte-Carlo permettant d'estimer I.

2 (3 pts) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre de simulations nécessaires N_0 pour que l'erreur relative associée à l'une des méthodes de Monte-Carlo proposées à la question précédente soit inférieure à 1% avec une probabilité supérieure ou égale à 99%.

Exercice 4 (5 pts) Décrire la méthodologie mise en oeuvre à l'aide du code `R` ci-dessous et ce qu'elle vise.

```
Niter <- 10000
f <- function(k) exp(-abs(k))

liste <- c()
x <- 0

for (k in 1:Niter)
{
  liste <- c(liste,x)
  v <- runif(1)
  if  (v < 0.5) y <- x+1 else y <- x-1
  if (y < 3 & y > -3)
    {
  u <- runif(1,0,1)
  alpha <- f(y)/f(x)
  if (u < alpha) x <- y
    }
}
```

Correction examen de rattrapage
HMMA310
2019-2020
3 février 2020

Exercice 1

1] $V(x_1\,\theta; x_2, ----, x_n)$

$$= \prod_{i=1}^{n-r} \left[\theta e^{-\theta x_i}\right] \left(\mathbb{P}(X \geq c)\right)^r$$

or $X \sim \mathcal{E}(\theta)$

$$\mathbb{P}(X \geq c) = 1 - \mathbb{P}(X < c)$$

$$= 1 - \int_0^c \theta e^{-\theta x}\,dx$$

$$= 1 + \left[e^{-\theta x}\right]_0^c = e^{-\theta c}$$

$$V(\theta; x_1, \dots, x_n)$$
$$= \theta^{m-r} e^{-\theta \sum_{i=1}^{m-r} x_i} e^{-\theta r c}$$
$$= \theta^{m-r} e^{-\theta \left[\sum_{i=1}^{m-r} x_i + r c \right]}$$

2) $\pi(\theta \mid x_1, \dots, x_n)$
$$\propto \theta^{m-r} e^{-\theta \left(\sum_{i=1}^{m-r} x_i + r c \right)} \theta^{a-1} e^{-\theta b} \, \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\theta)$$

$$\Rightarrow \pi(\theta \mid x_1, \dots, x_n) \propto \theta^{m-r+a-1} e^{-\theta \left[\sum_{i=1}^{m-r} x_i + r c + b \right]} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(\theta)$$

Ainsi,
$$\theta \mid x_1, \dots, x_n \sim \Gamma\left(m-r+a, \sum_{i=1}^{m-r} x_i + r c + b \right)$$

3) $$\hat{\theta} = \mathbb{E}^{\pi}(\theta \mid x_1, \dots, x_n) = \frac{m-r+a}{\sum_{i=1}^{m-r} + r c + b}$$

Exercice 2

Nous allons utiliser comme loi instrumentale une loi gaussienne centrée de variance $\left(\frac{1}{2}\right)$ tronquée sur l'intervalle $[-3,3]$. La densité associée est telle que $g(x) \propto e^{-x^2} \mathbb{1}_{[-3,3]}(x)$

Il est très aisé de simuler des réalisations suivant cette loi : on simule une réalisation d'une gaussienne centrée de variance $1/2$ jusqu'à ce qu'elle appartienne à l'intervalle $[-3,3]$.

Nous avons $f(x) = c\tilde{f}(x)$

si $x \in [-3,3]$ $g(x) = c\tilde{g}(x)$

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \leq (2 + \sin(5x) + \sin(2x))$$

$$\frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)} \leq 4 \quad \forall x \in [-3,3]$$

On peut donc mettre en oeuvre l'algorithme acceptation-rejet.

On simule y suivant $g(\cdot)$ et on accepte cette simulation avec probabilité : $\dfrac{\tilde{f}(y)}{4\tilde{g}(y)}$.

```
ftilde <- function(x) {exp(-x^2) ... }   (5)
vrl <- function(N)
{
x <- rep(0,N)
for (i in 1:N)
{
bool <- TRUE
while (bool)
{ y <- rnorm(1)
while (y > 3 | y < (-3))
        y <- rnorm(1)
if (ftilde(y)/(4*exp(-x^2)) < runif(1))
{ bool <- FALSE ; x[i] <- y } } } }
```

6

Exercice 3

1] $\hat{I}_N^1 = \frac{1}{N} \sum \frac{(2\pi)}{(1+X_i)} e^{-X_i} \sin(X_i)$

où $X_1, \ldots, X_N \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}_{[0,2\pi]}$

$$\hat{I}_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0,2\pi]}(X_i) \frac{\sin(X_i)}{(1+X_i)}$$

où $X_1, \ldots, X_N \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}xp(1)$

2] D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, nous avons

$$\mathbb{P}(|X-\mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}$$

Prenons $\hat{I}_N^1$, nous avons

$$\mathbb{E}(\hat{I}_N^1) = I$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{V}\left(\hat{\underline{I}}^1_N\right) = (2\pi)^2\left(\frac{1}{N}\right)\mathbb{V}_{U_{[0,2\pi]}}\left(\frac{e^{-x}\sin(x)}{(1+x)}\right)$$

et $\mathbb{V}_{U_{[0,2\pi]}}\left(\frac{e^{-x}\sin(x)}{(1+x)}(2\pi)\right)$

$$= \left[\mathbb{E}_{U_{[0,2\pi]}}\left[\frac{e^{-2x}}{(1+x)^2}\sin^2(x)(2\pi)^2\right] - \underline{I}^2\right]$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}\left(\left|\hat{\underline{I}}^1_N - \underline{I}\right| \leq \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}\left(\hat{\underline{I}}^1_N\right)}{\varepsilon^2}$$

$$\mathbb{P}\left(ER\left(\hat{\underline{I}}^1_N\right) \leq 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}\left(\hat{\underline{I}}^1_N\right)}{(0{,}01\,\underline{I})^2}$$

8

$$\frac{\mathbb{V}(\widehat{I}_N^1)}{I^2} = \frac{1}{N}\left[\frac{(2\pi)^2}{I^2}\,\mathbb{E}_{\mathcal{U}[0,2\pi]}\left[\frac{e^{-2X}\sin^2(X)}{(1+X)^2}\right] - 1\right]$$

$\forall x \in [0, 2\pi]$,

$$\frac{e^{-2x}\sin^2(x)}{(1+x)^2} \leq 1$$

Donc,

$$\frac{\mathbb{V}(\widehat{I}_N^1)}{I^2} \leq \frac{1}{N}\left(\frac{(2\pi)^2}{I^2} - 1\right)$$

Par ailleurs - - -