Examen de rattrapage - Théorie de l'information et de la décision
Partie 2, bayésienne (10 pts)

Exercice 1 (6 pts)

L'entraineur d'une équipe de football souhaite classer ses joueurs par rapport à leurs performances aux tirs aux buts (penaltys). Il cherche donc à estimer la probabilité intrinsèque de chacun de marquer un penalty. Pour ce faire, pendant 30 jours, il enregistre le nombre de tirs consécutifs qu'il leur a été nécessaire pour marquer un penalty et ce face à différents gardiens.

Nous nous concentrons sur le cas d'un joueur et nous supposons que tous les essais sont indépendants. Nous disposons alors de 30 réalisations indépendantes $x_1, \ldots, x_{30}$ suivant une loi géométrique de paramètre $\theta \in [0, 1]$ où θ est la probabilité intrinsèque que le joueur marque un penalty. Nous rappelons que, pour tout $i \in \{1, \ldots, 30\}$,

$$\mathbb{P}(X_i = x_i) = (1-\theta)^{x_i-1}\theta \times \mathbb{I}_{x_i \in \mathbb{N}_*} .$$

Objectif : proposer une procédure d'estimation de θ. Nous nous plaçons dans le paradigme bayésien.

1) (3 pts) Donner la loi a priori de Jeffreys pour θ ainsi que la loi a posteriori et l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique.

2) (3 pts) Supposons maintenant que θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$, donner l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique.

On rappelle que si la variable aléatoire θ suit une loi Beta de paramètre (a, b), elle admet comme densité

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\mathbb{I}_{\theta\in[0,1]}$$

avec $a > 0$ et $b > 0$, $\Gamma(n+1) = n!$ et $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

Exercice 2 (4 pts)

Trois individus arrivés indépendamment et au hasard à un arrêt de tram, se demandent quelle est la fréquence de passage des trams à cette période de la journée. Ils ont attendu 3, 4 et 6 minutes. Ils hésitent entre deux possibilités : les trams passent toutes les 8 minutes ou toutes les 12 minutes.

Nous supposons que les trois réalisations sont issues d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta \in \{8, 12\}$. En postulant une loi a priori uniforme sur les deux possibilités, $\mathbb{P}^\pi(\theta = 8) = \mathbb{P}^\pi(\theta = 12) = 1/2$, donner une résolution bayésienne de cette question.

Correction examen rattrapage Mars 2016

HMMA 101

1) $$f(x;\theta) = (1-\theta)^{x-1}\,\theta\,\mathbb{1}_{\mathbb{N}^*}(x)$$

$$\log f(X;\theta) = (X-1)\log(1-\theta) + \log(\theta)$$

$$\frac{d \log f(X;\theta)}{d\theta} = -\frac{X-1}{1-\theta} + \frac{1}{\theta}$$

$$\frac{d^2 \log f(X;\theta)}{d\theta} = -\frac{X-1}{(1-\theta)^2} - \frac{1}{\theta^2}$$

2

$$I_X(\theta) = \mathbb{E}\left[\frac{1-X}{(1-\theta)^2} + \frac{1}{\theta^2} \right]$$

$$I_X(\theta) = \frac{1-\mathbb{E}(X)}{(1-\theta)^2} + \frac{1}{\theta^2}$$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1}\theta$$

$$= \theta \sum_{k=1}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(1-\theta)^{k-1} = -\left(\sum_{k=0}^{\infty} (1-\theta)^k \right)'$$

$$= -\left(\frac{1}{\theta}\right)' = \left(\frac{1}{\theta^2}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}(X) = \frac{1}{\theta}$$

$$I_x(\theta) = \frac{1 - \frac{1}{\theta}}{(1-\theta)^2} + \frac{1}{\theta^2}$$

$$I_x(\theta) = \frac{1}{\theta^2} - \frac{1}{\theta(1-\theta)}$$

$$I_x(\theta) = \frac{1-\theta-\theta}{\theta^2(1-\theta)} = (\theta^2(1-\theta))^{-1}$$

On en déduit que

$$\pi^J(\theta) \propto \sqrt{\theta^{-2}(1-\theta)^{-1}}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$$

$$\pi^J(\theta) \propto \theta^{-1}(1-\theta)^{-1/2}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$$

loi impropre

$$\pi^J(\theta|\underline{x}) \propto \pi^J(\theta) \prod_{i=1}^{n} \left[(1-\theta)^{x_i-1}\theta\right] \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$$

$$\pi^J(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{n-1}(1-\theta)^{\sum x_i - 1/2 - n}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(\theta)$$

$$\theta|\underline{x} \sim \mathcal{B}eta\left(n, \sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2} - n\right)$$

4

$$\mathbb{E}^{\pi^J}(\theta|\underline{x}) = \left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{2}}\right]$$

2) $\theta \sim U_{[0,1]}$

$$\pi^U(\theta) \propto \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$$

$$\pi^U(\theta|\underline{x}) \propto \theta^n (1-\theta)^{\sum x_i - n} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$$

$$\theta|\underline{x} \sim \text{Beta}\left(n+1, \sum_{i=1}^{n} x_i + 1 - n\right)$$

$$\mathbb{E}^{\pi^U}(\theta|\underline{x}) = \left[\frac{n+1}{\sum_{i=1}^{n} x_i + 2}\right]$$

(5)

Exercice 2

$X_1 \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$ $\qquad \theta \in \{8, 12\}$

$X_2 \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$ $\perp\!\!\!\perp$

$X_3 \sim \mathcal{U}_{[0,\theta]}$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8) = \mathbb{P}^{\pi}(\theta = 12) = 1/2$$

Calculons la loi a posteriori de θ.

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8 \mid X_1, X_2, X_3)$$

$$\propto \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{3} \left[\mathbb{1}_{[0,8]}(X_i) \frac{1}{8} \right]$$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8 \mid X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 6) \propto \frac{1}{2 \times 8^3}$$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 12 \mid X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 6) \propto \frac{1}{2 \times 12^3}$$

Au final,

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta=8|\underline{K}) = \frac{1/2^3}{1/3^3 + 1/2^3} = \left[\frac{3^3}{2^3+3^3}\right]$$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta=12|\underline{K}) = \frac{2^3}{2^3+3^3} \approx 0,23$$