Université de Montpellier
M2 Biostatistique - HAX918X

Année 2022-2023

Examen terminal - vendredi 28 octobre 2022
Durée 2h00 - Documents non autorisés

Exercice 1 (8 pts)

Nous souhaitons estimer

$$I = \int_0^1 \log(2+x)\exp(-x^2/2)\mathrm{d}x\,.$$

1 (2 pts) Proposer deux estimateurs de I par des méthodes de Monte Carlo différentes :

- la première stratégie sera basée sur une loi uniforme et l'estimateur correspondant sera noté $\hat{I}_N^1$ avec N le nombre de simulation ;
- la deuxième méthode sera basée sur une loi gaussienne et l'estimateur associé sera noté $\hat{I}_N^2$ avec N le nombre de simulation.

2 (2 pts) Comparer $\hat{I}_N^1$ et $\hat{I}_N^2$.

3 (2 pts) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre de simulation nécessaire pour que l'erreur absolue relative de $\hat{I}_N^1$ soit inférieure à 1% avec une probabilité supérieure ou égale à 99%.

4 (2 pts) Donner un intervalle de confiance asymptotique de niveau 95% pour le paramètre I. Indication : utiliser le théorème central limite associé à $\hat{I}_N^1$.

Exercice 2 (6 pts)

Nous considérons la variable aléatoire X admettant pour densité de probabilité

$$f_X(x) = 4x^2\exp(-2x)\mathbb{I}_{x\geq 0}\,.$$

X est distribuée suivant une loi gamma de paramètre $(3,2)$. Nous souhaitons mettre en évidence une méthode de simulation efficace.

1 (2 pts) Dans la famille des lois exponentielles de paramètre $\lambda > 0$ ayant pour densité de probabilité

$$g(x;\lambda) = \lambda\exp(-\lambda x)\mathbb{I}_{x\geq 0}$$

lesquelles pouvons nous utiliser comme la loi instrumentale d'un algorithme acceptation-rejet ayant pour objectif de simuler des réalisations de X ?

2 (2 pts) Dans l'ensemble de lois instrumentales candidates explicité à la question précédente, laquelle est la plus efficace ?

3 (2 pts) Donner le code R mettant en oeuvre l'algorithme acceptation-rejet avec la loi instrumentale déterminée à la question précédente.

Exercice 3 (6 pts)

Nous considérons un n-échantillon $(x_1, \ldots, x_n)$ iid suivant une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma^2 > 0$ dont la densité est telle que

$$f(x; \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{I}_{x \geq 0} \,.$$

1) (3 pts) Donner la loi a priori de Jeffreys pour le paramètre σ^2. Est-elle propre ?

2) (3 pts) Montrer que la famille des lois Inverse Gamma est conjuguée pour le paramètre σ^2.

Correction examen final HAX918X
28/10/2022

Exercice 1

1| $$\hat{I}^1_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \log(2+X_i)\, e^{-X_i^2/2}$$

où $X_1, \dots, X_N \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}_{[0,1]}$

$$\hat{I}^2_N = \frac{\sqrt{2\pi}}{N}\sum_{i=1}^{N} \mathbb{1}_{[0,1]}(X_i)\, \log(2+X_i)$$

où $X_1, \dots, X_N \overset{iid}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

2| $$\mathbb{E}\left(\hat{I}^1_N\right) = \mathbb{E}\left(\hat{I}^2_N\right) = I$$

$$\mathbb{V}\left(\hat{I}^1_N\right) = \left(\frac{1}{N}\right) \mathbb{V}_{\mathcal{U}_{[0,1]}}\left(\log(2+X)\, e^{-X^2/2}\right)$$

$$\mathbb{V}\left(\hat{I}^2_N\right) = \left(\frac{2\pi}{N}\right) \mathbb{V}_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\mathbb{1}_{[0,1]}(X)\, \log(2+X)\right)$$

②

$$\mathbb{V}_{U_{[0,1]}}\left(\log(2+X)\,e^{-X^2/2}\right)$$

$$= \mathbb{E}_{U_{[0,1]}}\left(\log^2(2+X)\,e^{-X^2}\right) - I^2$$

$$\mathbb{V}_{N(0,1)}\left(\sqrt{2\pi}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(X)\,\log(2+X)\right)$$

$$= \mathbb{E}_{N(0,1)}\left((2\pi)\log^2(2+X)\,\mathbb{1}_{[0,1]}(X)\right) - I^2$$

Nous devons donc comparer

$$\int_0^1 \log^2(2+x)\,e^{-x^2}\,dx \quad \text{et}$$

$$\int_0^1 \sqrt{2\pi}\,\log^2(2+x)\,e^{-x^2/2}\,dx$$

Clairement $\forall x \in [0,1]$

$$e^{-x^2} \leq e^{-x^2/2} < \sqrt{2\pi}\,e^{-x^2/2}$$

Ainsi, $\forall x \in [0,1]$ ③

$$\log^2(2+x)e^{-x^2} \leq \sqrt{2\pi}\log^2(2+x)e^{-x^2/2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \log^2(2+x)e^{-x^2}dx \leq \int_0^1 \sqrt{2\pi}\log^2(2+x)e^{-x^2/2}dx$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}(\hat{I}_N^1) \leq \mathbb{V}(\hat{I}_N^2)$$

et donc nous préférons $\hat{I}_N^1$ à $\hat{I}_N^2$.

3] D'après BT, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{|\hat{I}_N^1 - I|}{I} \leq 0{,}01\right) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(\hat{I}_N^1)}{I^2 \, 10^{-4}}$$

Nous cherchons donc la plus petite valeur de N telle que

$$1 - \frac{\mathbb{V}(\hat{I}_N^1)\, 10^4}{I^2} \geq 1 - 10^{-2}$$

$$\iff \frac{\mathbb{V}(\hat{I}_N^1)}{I^2} \leq 10^{-6}$$

Nous cherchons donc une valeur a_N telle que $\frac{\mathbb{V}(\hat{I}_N^1)}{I^2} \leq a_N$ puis nous déduirons la plus petite valeur de N telle que $a_N \leq 10^{-6}$

$$\frac{\mathbb{V}(\hat{I}_N^1)}{I^2} = \frac{1}{N}\left[\frac{\int_0^1 \log^2(2+x)e^{-x^2}dx}{\left(\int_0^1 \log(2+x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)^2} - 1\right]$$

$$\leq \frac{1}{N}\left[\frac{\log^2(3)\, e}{\log^2(2)} - 1\right] = a_N$$

(5)

Nous en déduisons que

$$N \geq 10^6 \left(\frac{\log^2(3)\, e}{\log^2(2)} - 1 \right)$$

$$N \geq 5\,828\,612$$

4) $$\sqrt{N}\left(\hat{I}^1_N - I\right) \approx \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\int_0^1 \log^2(2+x)\, e^{-x^2}\, dx - I^2}_{\alpha}\Big)$$

$$\mathbb{P}\left(-F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0,975) \leq \frac{\sqrt{N}\left(\hat{I}^1_N - I\right)}{\sqrt{\alpha}} \leq F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0,975) \right) \approx 0,95$$

$$IC_{0,95}(I) = \left[\hat{I}^1_N \pm F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0,975) \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{N}} \right]$$

En prenant une borne supérieure pour α, on élargit l'intervalle, il est valide pour proba $\geq 0,95$

⑥

$$\alpha \leq \underbrace{\log^2(3) - \log^2(2)/e}_{\# 1}$$

et donc

$$IC_{0,95}(I) = \left[\hat{I}_N^1 \pm 1,96 \sqrt{N} \right]$$

<u>Exercice 2</u>

1) $f_X(x) = 4x^2 e^{-2x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$

$$g(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}} \quad \lambda > 0$$

$\forall x \geq 0$, $\dfrac{f_X(x)}{g(x;\lambda)} = \dfrac{4x^2}{\lambda} e^{-x(2-\lambda)}$

Pour que ce rapport soit borné supérieurement, il faut que $\lambda < 2$.

On peut donc utiliser
des lois exponentielles
de paramètres $\lambda \in]0,2[$.

2) Cherchons avant tout $\forall \lambda \in]0,2[$

$$x^* \in \arg\max_{x \geq 0} \frac{4x^2}{\lambda} e^{-x(2-\lambda)}$$

$$x^* \in \arg\max_{x \geq 0} \underbrace{\left[2\log(x) - x(2-\lambda)\right]}_{h(x;\lambda)}$$

$$h'(x;\lambda) = \frac{2}{x} - (2-\lambda)$$

$$h''(x;\lambda) = -\frac{2}{x^2} < 0$$

Fonction strictement concave

et donc $\frac{2}{x^*} - (2-\lambda) = 0$

$$\iff x^* = \left(\frac{2}{2-\lambda}\right)$$

Ainsi, $\forall x \geq 0, \forall \lambda \in]0,2[$

$$\frac{f_X(x)}{g(x;\lambda)} \leq \frac{4^2}{\lambda(2-\lambda)^2} e^{-2}$$

Cherchons maintenant la valeur

$$\lambda^* \in \arg\min \frac{4^2}{\lambda(2-\lambda)^2} e^{-2}$$

$$\lambda^* \in \arg\min \underbrace{-\log(\lambda) - 2\log(2-\lambda)}_{l(\lambda)}$$

$$l'(\lambda) = -\frac{1}{\lambda} + \frac{2}{2-\lambda}$$

$$l''(\lambda) = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{(2-\lambda)^2} > 0$$

Fonction strictement convexe et donc $-\frac{1}{\lambda^*} + \frac{2}{2-\lambda^*} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\lambda^* = 2 - \lambda^* \Leftrightarrow \lambda^* = \frac{2}{3}$$

La loi instrumentale la plus efficace est donc une loi exponentielle de paramètre $\left(\frac{2}{3}\right)$

3)

```
M <- exp(-2)* 27/2
bool <- T
while (bool) {
y <- rexp(1, 2/3)
u <- runif(1)
p <- dgamma(y,3,2) /
      (M * dexp(y, 2/3))
if (p <= u) {x <- y ; bool <- F}
}
x
```

10

Exercice 3

1) $\forall x \geq 0$

$$\log(f(x;\sigma^2)) = -\log(\sigma^2) + \log(x) - \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \sigma^2}(x;\sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{x^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{(\partial \sigma^2)^2}(x;\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^2} - \frac{4\sigma^2 x^2}{4(\sigma^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{(\partial \sigma^2)^2}(x;\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^2} - \frac{x^2}{(\sigma^2)^3}$$

Par ailleurs, si $X \sim \text{Rayleigh}(\sigma^2)$

$\mathbb{E}(X) = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $\mathbb{V}(X) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(X^2) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2 + \frac{\pi}{2}\sigma^2 = 2\sigma^2$$

$$I_X(\sigma^2) = \frac{2}{(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^2}$$ (11)

$$I_X(\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^2} = (\sigma^2)^{-2}$$

$$\Rightarrow \pi^J(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-1} \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

loi impropre

$\boxed{2}$ Si $\sigma^2 \sim IG(a, b)$

$$\pi(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-a-1} e^{-b/\sigma^2} \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

$$\pi(\sigma^2 | x_1, \dots, x_n) \propto (\sigma^2)^{-a-n-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left[b + \frac{\sum x_i^2}{2}\right]} \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

Alors $\sigma^2 | x_1, \dots, x_n \sim IG\left(a+n, b + \frac{\sum x_i^2}{2}\right)$

Ainsi la loi Inverse Gamma est conjuguée pour le paramètre σ^2.