Théorie de l'information et de la décision
Partie bayésienne (10 pts)
Documents interdits (sauf formulaire de probabilités)

Exercice 1 (4 pts) Les aéroports se doivent de respecter certaines normes concernant les bruits émis par des avions au décollage et à l'atterrissage. Ainsi pour les zones habitées proches d'un aéroport, la limite tolérée se situe à environ 80 décibels. Les habitants d'un des villages proches d'un aéroport assurent que le bruit atteint la valeur limite de 84 décibels en moyenne pour un certain type d'avions. L'aéroport affirme qu'il n'est que de 70 décibels. Des experts sont convoqués pour trancher entre les deux parties en présence. Ils admettent que l'intensité du bruit causé par un avion de ce type suit une loi gaussienne de moyenne θ et de variance 49. Ils enregistrent l'intensité du bruit provoqué par le passage de ces avions sur un échantillon de taille $n = 100$. Ils trouvent que $\bar{x}_{100} = \dfrac{1}{100}\displaystyle\sum_{i=1}^{100} x_i = 77$.

L'espace paramétrique est réduit à deux valeurs $\Theta \in \{70, 84\}$. Pour une loi a priori uniforme sur Θ et la fonction de perte ci-dessous (fonction de perte qui reflette le fait que le décideur souhaite avoir des certitudes quant à la mise en place couteuse d'un dispositif anti-bruit)

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \theta = d \\ 1 & \text{si} \quad \theta = 84 \quad \text{et} \quad d = 70 \\ 3 & \text{si} \quad \theta = 70 \quad \text{et} \quad d = 84 \end{cases}$$

donner la réponse bayésienne.

Exercice 2 (3 pts)

Le nombre x d'arrivés dans une file d'attente suit une loi binomiale négative de paramètre (k, θ)

$$f(x|k, \theta) = C_x^{k+x-1} \theta^k (1-\theta)^x \mathbf{1}_{x \in \mathbb{N}}$$

avec $\theta \in]0, 1[$. On suppose k fixé et l'on souhaite estimer θ. Nous nous plaçons dans le paradigme bayésien. Quelle est la famille de loi conjuguée pour le paramètre θ ? Démontrer le résultat énoncé.

Exercice 3 (3 pts)

La durée de vie x d'un composant électrique suit une loi log-normale de paramètre $(\theta, 1)$

$$f(x|\theta, 1) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}[\log(x) - \theta]^2\right) \mathbf{1}_{x \in \mathbb{R}_+^*}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$.
Nous disposons d'un n-échantillon $x_1, \ldots, x_n$ de durées de vie. Nous nous plaçons dans le paradigme bayésien et supposons que θ est distribué suivant une loi gaussienne centrée réduite. Calculer l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique $L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$.

Correction examen final HΠΠA 101 9/01/2019

Exercice 1

$\Theta = \{70, 84\}$

$\mathbb{P}(\theta = 70) = \mathbb{P}(\theta = 84) = 1/2$

$$\pi(\theta \mid \underline{x}) = \pi(\theta \mid \overline{x}_{100})$$

$$\mathbb{P}(\theta = 70 \mid \overline{x}_{100}) \propto e^{-\frac{200}{49}(77-70)^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathbb{P}(\theta = 8 \mid \overline{x}_{100}) \propto e^{-\frac{200}{49}(77-84)^2}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\theta = 70 \mid \overline{x}_{100}) = \mathbb{P}(\theta = 84 \mid \overline{x}_{100}) = \frac{1}{2}$$

$$L(\theta, d) = \begin{cases} 0 & \text{si } d = \theta \\ 1 & \text{si } \theta = 84 \text{ et } d = 70 \\ 3 & \text{si } \theta = 70 \text{ et } d = 84 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}^{\pi}\left[L(\theta, d) \mid \overline{x}_{100}\right]$$

$$= \mathbb{P}(\theta = 84 \mid \overline{x}_{100}) \mathbb{1}\{d = 70\}$$

$$+ 3\,\mathbb{P}(\theta = 70 \mid \overline{x}_{100}) \mathbb{1}\{d = 84\}$$

$$\hat{\theta}(\pi_{100}) = \begin{cases} 84 & \text{si } 3\mathbb{P}(\theta=70|\pi_{100}) \le \mathbb{P}(\theta=84|\pi_{100}) \\ 70 & \text{si } 3\mathbb{P}(\theta=70|\pi_{100}) > \mathbb{P}(\theta=84|\pi_{100}) \end{cases}$$

$$3\mathbb{P}(\mathbb{P} \ |\pi_{100}) \le \mathbb{P}(\theta=84|\pi_{100})$$

$$\iff \mathbb{P}(\theta=84|\pi_{100}) \ge 3/4$$

Donc, $\hat{\theta}(\pi_{100}) = 70$!

Exercice 2

Si $\theta \sim Beta(a,b)$

alors $\pi(\theta|x) \propto \theta^{k}(1-\theta)^{n}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$

et donc $\theta|x \sim Beta(k+a, n+b)$

la famille des lois Beta est donc conjuguée pour le paramètre θ.

Exercício 3

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\theta^2/2}\, e^{-\frac{1}{2}\sum\left[\theta - \log(x_i)\right]^2}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\theta^2/2}\, e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left[\theta^2 - 2\theta \log(x_i)\right]}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\theta^2/2}\, e^{-n\theta^2/2}\, e^{+\theta\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}\left[\theta^2(n+1) - 2\theta\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)\right]}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\frac{(n+1)}{2}\left(\theta - \frac{\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)}{n+1}\right)^2}$$

$$\theta|\underline{x} \sim N\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\hat{\theta}(\underline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n}\log(x_i)}{n+1}.$$