Théorie de l'information et de la décision
Partie 2, bayésienne (10 pts)

Exercice 1 (6 pts)

La durée T séparant deux arrivées successives de requêtes à un serveur suit une loi exponentielle de paramètre θ et de densité

$$f(t|\theta) = \theta \exp(-\theta t)\mathbb{I}_{t>0}\,.$$

On observe un échantillon de n durées $t_1, \ldots, t_n$. On se place dans le paradigme bayésien et on suppose que le paramètre θ est stochastique.

1) (3 pts) Donner la loi a priori de Jeffreys pour θ ainsi que la loi a posteriori et l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique.

2) (3 pts) Supposons maintenant que θ suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, b]$ avec $b > 0$, donner l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique.

Exercice 2 (4 pts)

La même information binaire $\theta \in \{0, 1\}$ est transmise 2 fois consécutives vers un récepteur à travers un canal de transmission. Ces deux informations sont perturbées par un bruit supposé gaussien centré de variance σ^2. Le message reçu s'écrit alors $z = (z_1, z_2)$ où $z_i = \theta + e_i$ ($i = 1, 2$) avec $e_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Le problème consiste à retrouver le symbole émis θ à partir du message reçu $z = (z_1, z_2)$.

On suppose que l'on dispose d'une information a priori sur les bits 0 et 1 qui se traduit par $\mathbb{P}(\theta = 0) = \mathbb{P}(\theta = 1) = 1/2$. Déterminer l'estimateur du maximum a posteriori du paramètre θ, noté $\hat{\theta}^{MAP}$. Représenter dans le plan (z_1, z_2) les points associés à la décision $\hat{\theta}^{MAP} = 0$.

Comment le résultat précédent se modifient-ils lorsque $\mathbb{P}(\theta = 0) = p$ et $\mathbb{P}(\theta = 1) = 1 - p$ avec $p < 1/2$?

Correction examen final HMMA101
Partie bayésienne
Janvier 2016

Exercice 1

1) Soit $T \sim Exp(\theta)$.
Calculons avant tout l'information de Fisher apportée par T sur θ.

$$\log f(T|\theta) = \log(\theta) - \theta T$$

$$\frac{d \log f}{d\theta}(T|\theta) = \frac{1}{\theta} - T$$

$$\frac{d^2 \log f(T|\theta)}{d\theta^2} = -\frac{1}{\theta^2}$$

Ainsi, $I_T(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$

Par conséquent,

$$\pi_J(\theta) \propto \theta^{-1} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}}$$

La loi a priori de Jeffreys est impropre. En effet,

$$\int_{\mathbb{R}} \pi_J(\theta)\, d\theta = +\infty$$

La loi a posteriori correspondante est telle que

$$\pi_J(\theta | t_1, \ldots, t_n) \propto \left[\prod_{i=1}^{n} f(t_i|\theta)\right] \pi_J(\theta)$$

$\underline{t} = (t_1, \text{-----}, t_n)$

$$\pi_J(\theta|\underline{t}) \propto \theta^n \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i\right\}$$

$$\theta^{-1} \mathbb{1}\{\theta > 0\}$$

$$\pi_J(\theta|\underline{t}) \propto \theta^{n-1} \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} t_i\right\} \mathbb{1}\{\theta > 0\}$$

$n \geq 1$

Ainsi, $\theta|\underline{t} \sim \text{Gamma}\left(n, \sum_{i=1}^{n} t_i\right)$

L'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique est la moyenne de la loi a posteriori.

$$\mathbb{E}^{\pi_J}(\theta|\underline{t}) = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$$

2) On suppose que

$$\pi(\theta) \propto \mathbb{1}_{[0,b]}(\theta)$$

$$\pi(\theta \mid \underline{t}) \propto \theta^{n} \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i\right\} \mathbb{1}_{[0,b]}(\theta)$$

$$\mathbb{E}^{\pi}(\theta \mid \underline{t}) = \frac{\displaystyle\int_0^b \theta^{n+1} \exp\left\{\theta \sum_{i=1}^{n} t_i\right\} d\theta}{\displaystyle\int_0^b \theta^{n} \exp\left\{-\theta \sum_{i=1}^{n} t_i\right\} d\theta}$$

$$\mathbb{E}^{\pi}(\theta \mid \underline{t}) = \frac{\Gamma(n+2)}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{n+2}} \, \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^{n+1}}{\Gamma(n+1)} \times \frac{F_{Ga(n+2, \Sigma t_i)}(b)}{F_{Ga(n+1, \Sigma t_i)}(b)}$$

où $F_{Ga(\alpha,\beta)}(x)$ est la valeur de la fonction de répartition d'une loi Gamma(α,β) au point x.

d'où : $\mathbb{E}^{\pi}(\theta \mid \underline{t}) = \dfrac{n+1}{\sum_{i=1}^{n} t_i} \, \dfrac{F_{Ga(n+2, \Sigma t_i)}(b)}{F_{Ga(n+1, \Sigma t_i)}(b)}$

Si n est grand, nous avons :

$$\frac{F_{Ga(n+2, \Sigma t_i)}(b)}{F_{Ga(n+1, \Sigma t_i)}(b)} \simeq 1$$

Exercice 2

$\theta \in \{0, 1\}$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 1) = \mathbb{P}^{\pi}(\theta = 0) = \frac{1}{2}$$

Par ailleurs,

$$f(Z_1, Z_2 | \theta) = \prod_{i=1}^{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(Z_i - \theta)^2}$$

Donc, $f(Z_1 Z_2 | \theta = 0) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2} Z_i^2}$

D'où $\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 0 | Z_1, Z_2) \propto f(Z_1, Z_2 | \theta = 0)\,\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 0)$

$$\propto \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2} Z_i^2}$$

De même,

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 1 | Z_1, Z_2) \propto \frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2}(Z_i - 1)^2}$$

On en déduit que

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 0 | Z) = \frac{\frac{1}{4\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{2} Z_i^2}}{\frac{1}{4\pi\sigma^2}\left[e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum Z_i^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (Z_i - 1)^2}\right]}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}^{\pi}(\theta=0|Z) = \left[\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum z_i^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum z_i^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (z_i-1)^2}} \right]$$

De même (ou par résolution)

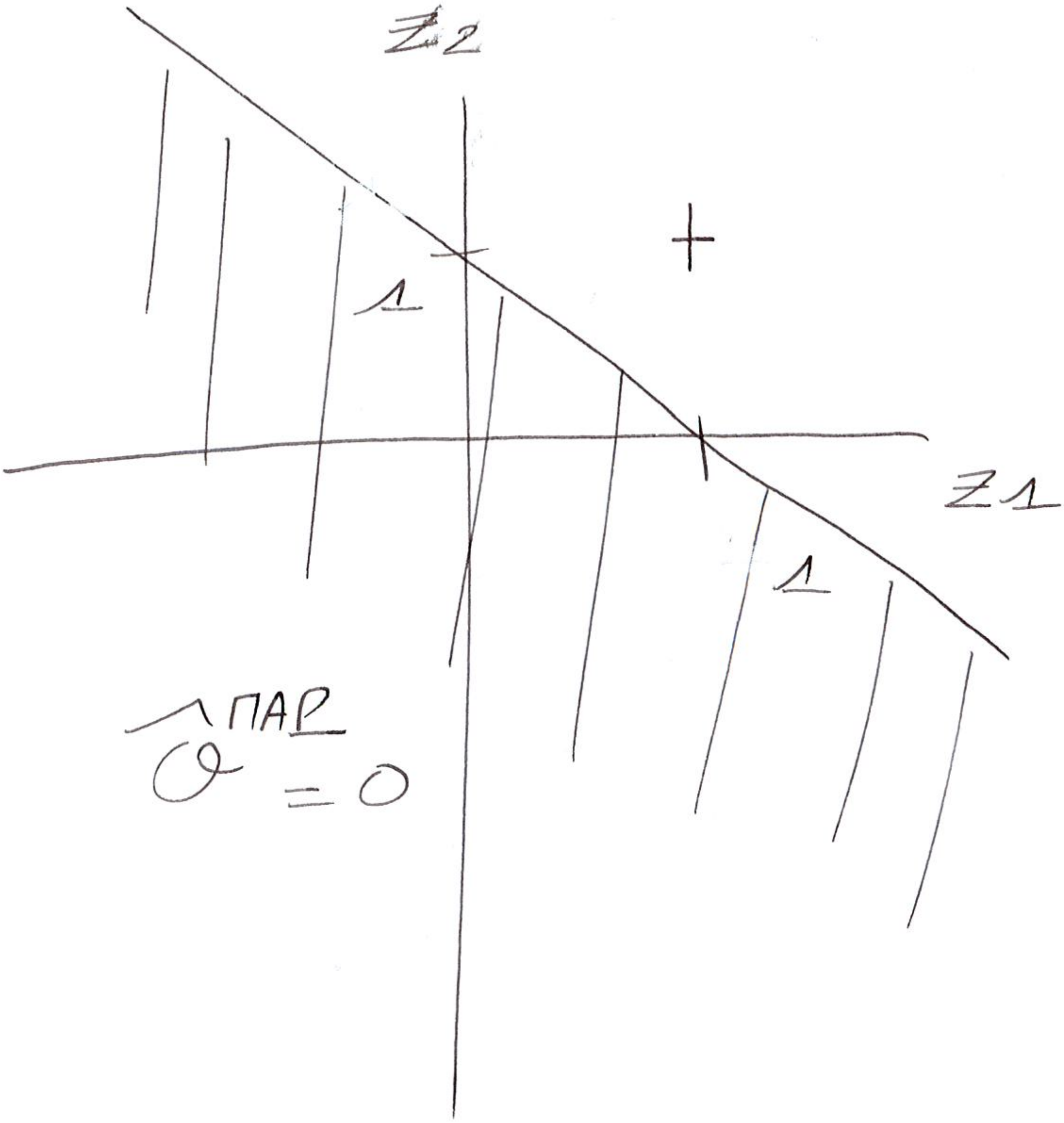
$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta=1|Z) = \left[\frac{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum z_i^2}}{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum z_i^2} + e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum (z_i-1)^2}} \right]$$

$$\hat{\theta}^{MAP} = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}^{\pi}(\theta=0|Z) > \mathbb{P}^{\pi}(\theta=1|Z)$$

$$\hat{\theta}^{MAP} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2\sigma^2}\sum z_i^2 > -\frac{1}{2\sigma^2}\sum (z_i-1)^2$$

$$\hat{\theta}^{MAP} = 0 \Leftrightarrow \sum z_i^2 < \sum (z_i-1)^2$$

Ainsi $\hat{\theta}^{MAP} = \begin{cases} 0 & \text{si } \sum z_i^2 < \sum (z_i-1)^2 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$



Lorsque $\Pi^{ii}(\theta=0) = \rho < 1/2$ la zone correspondant à $\hat{\theta}^{\Pi AP} = 0$ se rétrécit en se rapprochant du point $(0,0)$.