Université de Montpellier
M2 Biostatistique - HMMA310

Année 2020-2021

Examen partiel - 16 octobre 2020
Durée 1h30 - Documents interdits

Exercice 1 (8 pts) Nous considérons un n-échantillon $(x_1, \dots, x_n)$ iid suivant une loi de Rayleigh de paramètre $\sigma^2 > 0$ dont la densité est telle que

$$f(x; \sigma^2) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) \mathbb{I}_{x \geq 0}\,.$$

1) (2 pts) Donner la loi a priori de Jeffreys pour le paramètre σ^2. Est-elle propre ?

2) (2 pts) Pour la loi a priori de Jeffreys, donner l'estimateur bayésien $\hat{\sigma}_1^2$ associé à la fonction de perte quadratique.

3) (2 pts) Quelle est la famille de lois conjuguées pour le paramètre σ^2 ?

4) (2 pts) Pour la famille des lois a priori conjuguées, donner l'estimateur bayésien du Maximum A Posteriori (MAP) $\hat{\sigma}_2^2$.

Exercice 2 (8 pts) Nous considérons une loi a posteriori $\pi(\theta|x_1, \dots, x_n)$ sur un paramètre réel θ telle que $\mathbb{E}^\pi\left[\exp(\alpha\theta)|x_1, \dots, x_n\right] < \infty$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et la fonction de perte $L_a(\theta, d) = (\exp(a(\theta - d)) - a(\theta - d) - 1)$ où $a > 0$.

1 (2 pts) Pour tout $a > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction $d \longrightarrow L_a(\theta, d)$ prend des valeurs positives et qu'elle est convexe.

2 (2 pts) La perte $L_a(\theta, d)$, qui est une alternative aux fonctions de coût classiques, est dite LINEX (linear-exponential). Elle a été introduite par Varian en 1974. Décrire clairement comment elle pénalise les différentes erreurs d'estimation sur le paramètre θ.

3 (2 pts) Donner l'expression de l'estimateur bayésien de θ pour cette fonction de coût.

4 (2 pts) Nous supposons que les données $x_1, \dots, x_n$ sont iid et distribuées suivant une loi $\mathcal{N}(\theta, 1)$ et que $\pi(\theta) \propto 1$. Donner l'expression explicite de l'estimateur bayésien associé à la fonction de coût LINEX.

Exercice 3 (4 pts) Nous considérons un n-échantillon $x_1, \dots, x_n$ distribué suivant une loi gausienne d'espérance θ et de variance 1. Nous supposons que θ est distribué suivant une loi gaussienne centrée réduite. Donner la région de crédibilité HPD associée à un niveau de risque de 5%.

Correction examen de contrôle continu
HMMA 310
16/10/2020

Exercice 1

1) $\log f(x;\sigma^2) = \log(x) - \log(\sigma^2) - \dfrac{x^2}{2\sigma^2}$ pour tout $x \geq 0$

$$\frac{\partial \log f}{\partial \sigma^2}(x;\sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^2} + \frac{x^2}{2(\sigma^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \log f}{(\partial \sigma^2)^2}(x;\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^2} - \frac{x^2}{(\sigma^2)^3}$$

Par ailleurs,

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$u(x) = x^2 \ ; \ u'(x) = 2x$$

$$v'(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \ ; \ v(x) = - \ e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \left[- x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2 x e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2 \left[- e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \right]_0^{+\infty}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}(X^2) = 2\sigma^2$$

Ainsi,

$$I_X(\ ) = -\frac{1}{(\sigma^2)^2} + \frac{2\sigma^2}{(\sigma^2)^3}$$

$$\Leftrightarrow I_X(\sigma^2) = \frac{1}{(\sigma^2)^2}$$

Et donc $I_n(\sigma) = \dfrac{n}{(\sigma^2)^2}$

On en déduit que

$$\pi^J(\sigma^2) \propto (\sigma^2)^{-1} \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

Clairement $\int_{\mathbb{R}^+} \pi^J(\sigma^2) \; (= +\infty)$

diverge, la loi a priori de Jeffreys est impropre.

2)

$$\pi(\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n)$$

$$\propto (\sigma^2)^{-n-1} \exp\left(-\frac{1}{\sigma^2} \frac{\sum x_i^2}{2}\right) \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

Ainsi

$$\sigma^2 \mid x_1, \dots, x_n \sim IG\left(n, \frac{\sum x_i^2}{2}\right)$$

Pour la fonction de perte quadratique, l'estimateur bayesien de σ^2 est

$$\mathbb{E}^{\pi}(\sigma^2 | x_1, \dots, x_n).$$

On obtient

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2(n-1)}$$

3] Si $\sigma^2 \sim IG(\alpha, \beta)$

alors $\pi(\sigma^2 | x_1, \dots, x_n)$

$$\propto (\sigma^2)^{-n-\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{2}\right]} \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

Et donc dans ce cas,

$$\sigma^2 | x_1, \dots, x_n \sim IG\left(n+\alpha, \frac{\sum x_i^2}{2} + \beta\right).$$

La famille des lois inverse gamma est donc conjuguée pour le paramètre σ^2.

1] Si $\sigma^2 \sim IG(\alpha, \beta)$ alors

$$\pi(\sigma^2 | x_1, \dots, x_n) \propto (\sigma^2)^{-n-\alpha-1} e^{-\frac{1}{\sigma^2}\left[\beta + \frac{\sum x_i^2}{2}\right]} \mathbb{1}_{\{\sigma^2 > 0\}}$$

Ainsi $\log(\pi(\sigma^2 | x_1, \dots, x_n))$

$$= \log(cst) - (n+\alpha+1)\log(\sigma^2) - \frac{1}{\sigma^2}\left(\beta + \frac{\sum x_i^2}{2}\right) \quad \text{pour } \sigma^2 > 0$$

On cherche

$$\widehat{\sigma_2}^2 \in \arg\max_{\sigma^2 > 0} \underbrace{\log(\pi(\sigma^2 | x_1, \dots, x_n))}_{h(\sigma^2)}$$

$$\frac{dh}{d\sigma^2}(\sigma^2) = -\frac{n+\alpha+1}{\sigma^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^2}\left(\beta + \frac{\sum x_i^2}{2}\right)$$

$$\frac{d^2h}{(d\sigma^2)^2}(\sigma^2) = \frac{n+\alpha+1}{(\sigma^2)^2} - \frac{2}{(\sigma^2)^3}\left(\beta + \frac{\sum x_i^2}{2}\right)$$

Cherchons σ_*^2 tel que

$$\frac{dh}{d\sigma^2}(\sigma_*^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad -\frac{n+\alpha+1}{\sigma_*^2} + \frac{1}{(\sigma_*^2)^2}\left(\beta + \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}{2}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \sigma_*^2 = \left[\frac{\beta + \sum_{i=1}^{n} y_i^2/2}{n+\alpha+1}\right]$$

Par ailleurs,

$$\frac{d^2h}{(d\sigma^2)^2}(\sigma_*^2) = \frac{(n+\alpha+1)^3}{\left[\beta + \frac{\sum y_i^2}{2}\right]^2} - 2\,\frac{(n+\alpha+1)^3}{\left[\beta + \frac{\sum y_i^2}{2}\right]^2}$$

$$= -\frac{(n+\alpha+1)^3}{\left(\beta + \frac{\sum y_i^2}{2}\right)^2} < 0$$

Ainsi,

$$\hat{\sigma}_2^2 = \left[\frac{\beta + \sum y_i^2/2}{n+\alpha+1}\right]$$

Exercice 2

1)
$$L_a(\theta,d) = e^{a(\theta-d)} - a(\theta-d) - 1$$

$$\frac{dL_a}{dd}(\theta,d) = a - a\,e^{a(\theta-d)}$$

$$\frac{d^2L_a}{(dd)^2}(\theta,d) = a^2\,e^{a(\theta-d)} > 0$$

Donc la fonction $L_a(\theta,d)$ est strictement convexe.

Par ailleurs, $\frac{dL_a}{dd}(\theta,d^*) = 0$

$$\iff a - a\,e^{a(\theta-d^*)} = 0$$

$$\iff a(\theta-d^*) = 0$$

$$\iff d^* = \theta$$

Elle admet son minimum au point $d = \theta$.
En ce point, elle prend la valeur $L_a(\theta, \theta) = 0$.
Ainsi, $L_a(\theta, d) \geq 0$.

2) Lorsque l'on sous-estime θ, ie $d < \theta$, la perte LINEX a un comportement exponentiel.
Lorsque l'on sur-estime θ, ie $d > \theta$, la perte LINEX a un comportement linéaire. Avec une telle perte les fortes sous-estimations de θ sont lourdement pénalisées.

3) Pour trouver l'estimateur bayesien, on minimise la perte relativement à la loi a posteriori.

On cherche

$$\hat{\theta} \in \arg\min_{d \in \mathbb{R}} \mathbb{E}^{\pi}\left(L_a(\theta, d) \mid x_1, \dots, x_n\right)$$

Soit $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)$

$$\mathbb{E}^{\pi}(L_a(\theta, d) \mid \underline{x}) = \mathbb{E}^{\pi}\left[e^{a(\theta - d)} \mid \underline{x}\right]$$

$$- a\, \mathbb{E}^{\pi}(\theta \mid \underline{x}) + a d - 1$$

Soit $g(d) = \mathbb{E}^{\pi}(L_a(\theta, d) \mid \underline{x})$

$$\frac{dg}{dd}(d) = a - \mathbb{E}^{\pi}\left[a\, e^{a(\theta - d)} \mid \underline{x}\right]$$

(10)

$$\frac{d^2 g}{(d\alpha)^2}(\alpha) = -a^2 \, \mathbb{E}^{\Pi}\left(e^{a(\theta-\alpha)} \mid \underline{K}\right)$$

$$< 0$$

Donc la fonction est strictement concave.

Cherchons α^* tel que

$$\frac{dg}{d\alpha}(\alpha^*) = 0$$

$$\Longleftrightarrow a - a \, \overline{\mathbb{E}}^{\Pi}\left[e^{a(\theta-\alpha^*)} \mid \underline{K}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow a - a \, e^{-a\alpha^*} \mathbb{E}^{\Pi}\left[e^{a\theta} \mid \underline{K}\right] = 0$$

$$\Longleftrightarrow e^{-a\alpha^*} \mathbb{E}^{\Pi}\left[e^{a\theta} \mid \underline{K}\right] = 1$$

$$\Longleftrightarrow a\alpha^* = \log\left[\mathbb{E}^{\Pi}\left(e^{a\theta} \mid \underline{K}\right)\right]$$

$$\Longleftrightarrow \alpha^* = \frac{\log\left[\mathbb{E}^{\Pi}\left(e^{a\theta} \mid \underline{K}\right)\right]}{a}$$

On en déduit que

$$\hat{\theta} = \left[\frac{\log\left[\mathbb{E}^{\pi}(e^{a\theta}|\underline{x})\right]}{a} \right].$$

4] Dans ce cas, nous avons

$$\theta|\underline{x} \sim N\left(\bar{x}, \frac{1}{n}\right) \text{ où}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Aussi, $\mathbb{E}^{\pi}\left(e^{a\theta}|\underline{x}\right)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{a\theta} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}(\theta-\bar{x})^2} d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2}\theta^2 + n\theta\bar{x} - \frac{n}{2}\bar{x}^2 + a\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{n}{2}\left[\theta^2 - 2\theta\bar{x} + \bar{x}^2 - \frac{2a\theta}{n}\right]\right) d\theta$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n}{2}\left(\theta-\left(\bar{x}+\frac{a}{n}\right)\right)^2} d\theta$$

$$\times\, e^{-\frac{n}{2}\bar{x}^2} e^{\frac{n}{2}\left(\bar{x}+\frac{a}{n}\right)^2}$$

$$= e^{-\frac{n}{2}\bar{x}^2} e^{\frac{n}{2}\bar{x}^2} e^{\bar{x}a} e^{\frac{n}{2}\frac{a^2}{n^2}}$$

$$= e^{\bar{x}a + \frac{a^2}{2n}}$$

$=$

On obtient

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{x}a + a^2/2n}{a}$$

$$\hat{\theta} = \bar{x} + \frac{a}{2n}$$

Exercice 3

Dans ce cas, nous avons $\theta | \underline{x} \sim \mathcal{N}\left(\frac{\bar{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$, la loi a posteriori étant la densité symétrique autour de $\frac{\bar{x}}{n+1}$ et unimodale

Ainsi la région de crédibilité HPD est telle que

$$\left[\frac{x}{n+1} - F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0.975)/\sqrt{n+1} \; ; \; \frac{x}{n+1} + F^{-1}_{\mathcal{N}(0,1)}(0.975)/\sqrt{n+1} \right]$$

Intervalle symétrique par rapport à $\frac{x}{n+1}$.