Université de Montpellier — Année 2018-2019
M1 Biostatistique & MIND - HMMA101

**Examen partiel - 11 décembre 2018**
**Durée 1h - Documents interdits sauf formulaire de probabilités**

**Exercice 1 (8 pts)** Considérons l'arrivée d'appels téléphoniques sur un faisceau de lignes d'un central téléphonique. On admet que pour un faisceau particulier, le nombre d'arrivées d'appels pendant l'unité de temps suit une loi de Poisson de paramètre inconnu $\theta > 0$. Sous cette hypothèse, la durée $x$ séparant deux arrivées successives d'appels téléphoniques sur ce faisceau (avec l'unité de temps précédente) suit une loi exponentielle de paramètre $\theta$ :

$$f(x|\theta) = \theta \exp(-\theta x)\mathbb{I}_{x\geq 0}\,.$$

On observe $n$ durées successives $x_1, \dots, x_n$.

**1) (2 pts)** Donner la loi a priori de Jeffreys pour le paramètre $\theta$. Est-elle propre ?

**2) (3 pts)** Donner l'estimateur bayésien, $\hat{\theta}^1$, associé à la fonction de perte quadratique et à la loi a priori définie à la question précédente.

**3) (3 pts)** On suppose que $\theta$ est distribué suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ fixé. Donner l'estimateur bayésien, $\hat{\theta}^2$, correspondant au maximum de la loi a posteriori.

**Exercice 2 (6 pts)** On souhaite estimer la précision d'une balance industrielle. Pour ce faire, on pèse $n$ fois le même objet dont on connait parfaitement le poids. On note $x_i$ la différence entre la $i$-ème mesure et la valeur connue du poids. On suppose que $x_i|\theta \sim \mathcal{N}(0, 1/\theta)$ ($1/\theta$ est la variance de la loi gausienne). Les mesures sont considérées comme indépendantes. Donner deux estimateurs bayésiens pour le paramètre $\theta$ chacun associé à la loi a priori de Jeffreys.

**Exercice 3 (6 pts)** La même information binaire $\theta \in \{0, 2\}$ est transmise 2 fois consécutives vers un récepteur à travers un canal de transmission. Ces deux informations sont perturbées par un bruit supposé gaussien centré de variance 1. Le message reçu est stocké dans le vecteur $z = (z_1, z_2)$ avec $z_1$ et $z_2$ deux variables aléatoires indépendantes distribuées suivant des lois gaussiennes de moyenne $\theta$ et variance 1. Le problème consiste à retrouver le symbole émis $\theta$ à partir du message reçu $z = (z_1, z_2)$. Nous supposons que $\mathbb{P}(\theta = 0) = 1/3$.

**1 (3 pts)** Donner la loi a posteriori de $\theta$, ie $\mathbb{P}(\theta = 0|z)$ et $\mathbb{P}(\theta = 2|z)$.

**2 (3 pts)** Calculer l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte $L(\theta, d) = \mathbb{I}_{\theta\neq d}$.

# Correction Examen Partiel - HMMA101
11/12/2018

## Exercice 1 $\quad \forall x \geq 0$

1) $\log\left[f(x|\theta)\right] = \log(\theta) - \theta x$

$$\frac{d \log f}{d\theta}(x|\theta) = \frac{1}{\theta} - x$$

$$\frac{d^2 \log f}{(d\theta)^2}(x|\theta) = -\frac{1}{\theta^2}$$

$$I^F_x(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$$

$$\pi^J(\theta) \propto \theta^{-1} \mathbb{1}\{\theta > 0\}$$

(2)

C'est une loi impropre dans la mesure où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \pi^J(\theta)\, d\theta$$

n'est pas finie.

2) $\pi^J(\theta|\underline{x}) \propto \prod_{i=1}^{n} \left[\theta e^{-\theta x_i}\right] \theta^{-1} \mathbb{1}_{\{\theta>0\}}$

$\underline{x} = (x_1, ---, x_n)$

$$\Rightarrow \pi^J(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i} \mathbb{1}_{\{\theta>0\}}$$

$$\Rightarrow \theta|\underline{x} \sim \text{Gamma}\left(n, \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

Pour la fonction de perte quadratique l'estimateur bayesien est la moyenne de la loi a posteriori

$$\hat{\theta}_1 = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

3\] $\pi(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}}$ (3)

$\pi(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{n} e^{-\theta(\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i)} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}}$

\[Si $n \geq 1$,
$\theta|\underline{x} \sim \text{Gamma}(n-1, \lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i)$\]

Si $\theta > 0$

$\log(\pi(\theta|\underline{x})) = n\log(\theta) - \theta[\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i] + cst$

$\frac{d \log \pi}{d\theta}(\theta|\underline{x}) = \frac{n}{\theta} - \lambda - \sum x_i$

$\frac{d^2 \log \pi}{(d\theta)^2}(\theta|\underline{x}) = -\frac{n}{\theta^2} < 0$

La fonction $\pi(\theta|\underline{x})$ est strictement concave.

$\theta^*$ tel que $\frac{n}{\theta^*} - \lambda - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$

correspond à un maximum global.

$$\Rightarrow \theta^* = \left[\frac{n}{\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i}\right]$$

$$\hat{\theta}^2 = \left[\frac{n}{\lambda + \sum_{i=1}^{n} x_i}\right].$$

<u>Exercício 2</u>

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \theta^{1/2} e^{-\frac{\theta}{2} x^2}$$

$$\log f(x|\theta) = -\frac{1}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\log(\theta) - \frac{\theta}{2} x^2$$

$$\frac{d \log f}{d\theta}(x|\theta) = \frac{1}{2\theta} - \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{d^2 \log f}{(d\theta)^2}(x|\theta) = \frac{-1}{2\theta^2}$$

$$I_x^F(\theta) = \frac{1}{2\theta^2}$$

$$\Rightarrow \pi^J(\theta) \propto \theta^{-1} \mathbb{I}\{\theta > 0\}$$

5

$$\pi^J(\theta|\underline{x}) \propto \theta^{M/2-1} e^{-\frac{\theta}{2}\sum_{i=1}^{M} x_i^2} \mathbb{1}_{\{\theta>0\}}$$

$$\Rightarrow \theta|\underline{x} \sim \text{Gamma}\left(\frac{M}{2}, \frac{\sum_{i=1}^{M} x_i^2}{2}\right)$$

$$\hat{\theta}^1 = E^J(\theta|\underline{x}) = \left[\frac{M}{\sum x_i^2}\right]$$

$\hat{\theta}^1$ correspond à la fonction de perte quadratique.

$$\frac{d \log \pi^J}{d\theta}(\theta|\underline{x}) = \left(\frac{M}{2}-1\right)\frac{1}{\theta} - \frac{\sum x_i^2}{2}$$

$$\frac{d^2 \log \pi^J}{(d\theta)^2}(\theta|\underline{x}) = \left(\frac{M}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{\theta^2}\right)$$

$$\hat{\theta}^2 = \frac{M-2}{\sum_{i=1}^{M} x_i^2}$$ (on suppose que $M>2$)

$\hat{\theta}^2$ est le MAP.

# Exercice 3

1] $\mathbb{P}(\theta=0|(z_1,z_2))$

$$\propto \frac{1}{3} e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}$$

$\mathbb{P}(\theta=2|(z_1,z_2))$

$$\propto \frac{2}{3} e^{-\frac{(z_1-2)^2+(z_2-2)^2}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\theta=0|(z_1,z_2)) = \left[\frac{e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}}{e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}+2e^{-\frac{(z_1-2)^2+(z_2-2)^2}{2}}}\right]$$

$$\mathbb{P}(\theta=2|(z_1,z_2)) = \left[\frac{2e^{-\frac{(z_1-2)^2+(z_2-2)^2}{2}}}{e^{-\frac{z_1^2+z_2^2}{2}}+2e^{-\frac{(z_1-2)^2+(z_2-2)^2}{2}}}\right]$$

$z=(z_1,z_2)$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[\theta=0|z] = \left[1+2e^{4z_1+4z_2-8}\right]^{-1}$$

$$\mathbb{P}(\theta=2|z] = \left[1+\frac{1}{2}e^{-4z_1-4z_2+8}\right]^{-1}$$

2) $$\hat{\theta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbb{P}(\theta=0|Z) \geq \mathbb{P}(\theta=2|Z) \\ 2 & \text{sinon} \end{cases}$$

7

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 0 \quad \text{si} \quad \underline{1} + 2e^{4Z_1 + 4Z_2 - 8} \leq \underline{1} + \frac{1}{2}e^{-4Z_1 - 4Z_2 + 8}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 0 \quad \text{si} \quad e^{-8Z_1 - 8Z_2 + 16} \geq 4$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 0 \quad \text{si} \quad -8Z_1 - 8Z_2 + 16 \geq \log(4)$$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = 0 \quad \text{si} \quad Z_1 + Z_2 \leq \left[2 - \frac{\log(2)}{4}\right]$$