Théorie de l'information et de la décision
Examen de rattrapage

Partie bayésienne (10 pts)
Documents interdits (sauf formulaire de probabilités)

Exercice 1 (3 pts)

Trois individus arrivés indépendamment et au hasard à un arrêt de tram, se demandent quelle est la fréquence de passage des trams à cette période de la journée. Ils ont attendu 3, 4 et 6 minutes. Ils hésitent entre deux possibilités : les trams passent toutes les 8 minutes ou toutes les 12 minutes.

Nous supposons que les trois réalisations sont issues d'une loi uniforme sur $[0, \theta]$ avec $\theta \in \{8, 12\}$. En postulant une loi a priori uniforme sur les deux possibilités, $\mathbb{P}^\pi(\theta = 8) = \mathbb{P}^\pi(\theta = 12) = 1/2$, donner une résolution bayésienne de cette question.

Exercice 2 (4 pts)

Nous considérons un n-échantillon $x_1, \dots, x_n$ distribué suivant une loi gaussienne d'espérance θ_1 et de variance θ_2. Nous supposons que $\theta_1|\theta_2 \sim \mathcal{N}(0, \theta_2)$ et que $\theta_2 \sim \mathcal{IG}(1, 1)$. Donner la loi a posteriori marginale de θ_1.

Nous rappelons que si x suit une loi Inverse Gamma de paramètre (α, β) ($x \sim \mathcal{IG}(\alpha, \beta)$) alors x admet pour densité de probabilité

$$f(x|\alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha-1} \exp\left(-\frac{\beta}{x}\right) \mathbf{1}_{x>0} \,.$$

Exercice 3 (3 pts)

La durée T séparant deux arrivées successives de requêtes à un serveur suit une loi exponentielle de paramètre θ^{-1}. On observe un échantillon de n durées $t_1, \dots, t_n$. Donner la loi a priori de Jeffreys pour θ ainsi que la loi a posteriori et l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique.

Correction examen de rattrapage HMMA 101
27/03/2019

Exercice 1

$$\theta \in \{8, 12\}$$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8) = \mathbb{P}^{\pi}(\theta = 12) = 1/2$$

$$X_1, X_2, X_3 \mid \theta \overset{iid}{\sim} U_{[0,\theta]}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$f(\underline{x} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{3} f(x_i \mid \theta)$$

$$\Leftrightarrow f(\underline{x} \mid \theta) = \prod_{i=1}^{3} \left(\frac{1}{\theta}\right) \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x_i)$$

$$\Leftrightarrow f(\underline{x}|\theta) = \theta^{-3} \mathbb{1}\{\theta \geq \max(\underline{x})\}$$

Ainsi,

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8|\underline{x}) \propto 8^{-3} \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) \leq 8\}$$

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 12|\underline{x}) \propto 12^{-3} \mathbb{1}\{\max(\underline{x}) \leq 12\}$$

Nous avons $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ et $x_3 = 6$

Donc, $\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8|\underline{x}) = \left[\dfrac{8^{-3}}{8^{-3}+12^{-3}}\right]$

et $\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 12|\underline{x}) = \left[\dfrac{12^{-3}}{8^{-3}+12^{-3}}\right]$

On obtient

$$\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 8|\underline{x}) = \frac{27}{35}$$

et $\mathbb{P}^{\pi}(\theta = 12|\underline{x}) = \dfrac{8}{35}$

Sans fonction de perte, on choisit

$$\hat{\theta} = 8.$$

Exercice 2

$x_1, \ldots, x_n \mid \theta_1, \theta_2 \overset{iid}{\sim} N(\theta_1, \theta_2)$

$$\left.\begin{array}{l}\theta_1 \mid \theta_2 \sim N(0, \theta_2) \\ \theta_2 \sim I\Gamma(1, 1)\end{array}\right| \underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$$

$$f(\underline{x} \mid \theta_1, \theta_2) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\theta_2}}\right) e^{-\frac{1}{2\theta_2}(x_i - \theta_1)^2}$$

$$\Leftrightarrow f(\underline{x} \mid \theta_1, \theta_2) = (2\pi)^{-n/2}\, \theta_2^{-n/2}\, e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}$$

Ainsi,

$$\pi(\theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}) \propto \theta_2^{-n/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \theta_1)^2}\, \theta_2^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\theta_1^2}$$
$$\theta_2^{-2} e^{-\frac{1}{\theta_2}} \mathbb{1}\{\theta_2 > 0\}$$

$$\Leftrightarrow \pi(\theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}) \propto \theta_2^{-n/2 - 2} e^{-\frac{1}{\theta_2}\left[1 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2/2\right]} \mathbb{1}\{\theta_2 > 0\}$$
$$\theta_2^{-1/2} e^{-\frac{1}{2\theta_2}\left[n\theta_1^2 - 2\theta_1 \sum x_i + \theta_1^2\right]}$$

$$\Leftrightarrow \pi(\theta_1, \theta_2 \mid \underline{x}) \propto \theta_2^{-1/2} e^{-\frac{n+1}{2\theta_2}\left[\theta_1 - \frac{\sum x_i}{n+1}\right]^2}$$
$$\theta_2^{-n/2 - 2} e^{-\frac{1}{\theta_2}\left[1 + \frac{\sum x_i^2}{2} - \frac{(\sum x_i)^2}{2(n+1)}\right]} \mathbb{1}\{\theta_2 > 0\}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\theta_1 \mid \theta_2, \underline{x} \sim N\left(\frac{\sum x_i}{n+1}, \frac{\theta_2}{n+1}\right)$$

$$\theta_2 \mid \underline{x} \sim IG\left(\frac{n}{2}+1, 1+\frac{\sum x_i^2}{2}-\frac{(\sum x_i)^2}{2(n+1)}\right)$$

Soit $s^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2$ et

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$1 + \frac{\sum x_i^2}{2} - \frac{(\sum x_i)^2}{2(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2} + \frac{n\bar{x}^2}{2} - \frac{n^2\bar{x}^2}{2(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{s^2}{2} + \frac{n(n+1)\bar{x}^2 - n^2\bar{x}^2}{2(n+1)}$$

$$= 1 + \frac{s^2}{2} + \frac{n\bar{x}^2}{2(n+1)}$$

$$\Longrightarrow \theta_1 \mid \theta_2, \underline{x} \sim N\left(\frac{n\bar{x}}{n+1}, \frac{\theta_2}{n+1}\right)$$

$$\theta_2 \mid \underline{x} \sim IG\left(\frac{n}{2}+1, 1+\frac{s^2}{2}+\frac{n\bar{x}^2}{2(n+1)}\right)$$

$$\pi(\theta_1|x)$$

$$\propto \int \theta_2^{-\frac{n}{2}-2-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{\theta_2}\left[1+\frac{1^2}{2}+\frac{n\bar{x}^2}{2(n+1)}+\frac{n+1}{2}\left(\theta_1-\frac{\sum x_i}{n+1}\right)^2\right]} d\theta_2$$

$$\Rightarrow \pi(\theta_1|x) \propto \left[1+\frac{1^2}{2}+\frac{n\bar{x}^2}{2(n+1)}+\left(\frac{n+1}{2}\right)\left(\theta_1-\frac{\sum x_i}{n+1}\right)^2\right]^{-\left(\frac{n}{2}+\frac{3}{2}\right)}$$

$$\cancel{\Rightarrow \pi(\theta_1|x) \propto \left[1+\frac{1^2}{2}+n\frac{\bar{x}^2}{2(n+1)}+\left(\frac{n+1}{2}\right)\theta_1^2-\theta_1\sum x_i+\left(\frac{n+1}{2}\right)\frac{\left(\sum x_i\right)^2}{(n+1)^2}\right]^{-\left(\frac{n+2+1}{2}\right)}}$$

ligne inutile

$$\Rightarrow \pi(\theta_1|x) \propto \left[1+\frac{(n+1)}{2+1^2+\frac{n\bar{x}^2}{n+1}}\left[\theta_1-\frac{n\bar{x}}{n+1}\right]^2\right]^{-\left(\frac{n+2+1}{2}\right)}$$

$$\theta_1|x \sim \mathcal{T}\left(n+2,\ \frac{n\bar{x}}{n+1},\ \frac{2+1^2+n\bar{x}/(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right)$$

6

Exercicio 3

$T_1, ----, T_n | \theta \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(1/\theta) \quad \theta > 0$

$$f(t|\theta) = \frac{1}{\theta} e^{-t/\theta} \mathbb{1}_{\{t>0\}}$$

$$\log(f(t|\theta)) \overset{p.s.}{=} -\log(\theta) - t/\theta$$

$$\frac{d \log f(t|\theta)}{d\theta} = -\frac{1}{\theta} + \frac{t}{\theta^2}$$

$$\frac{d^2 \log f(t|\theta)}{(d\theta)^2} = \frac{1}{\theta^2} - \frac{2\theta t}{\theta^4}$$

$$= \frac{1}{\theta^2} - \frac{2t}{\theta^3}$$

$$I_t^F(\theta) = -\frac{1}{\theta^2} + 2\frac{\mathbb{E}(t|\theta)}{\theta^3}$$

$$\Rightarrow I_t^F(\theta) = \frac{2}{\theta^2} - \frac{1}{\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

$\underline{t} = (t_1, ----, t_n)$

$$\Rightarrow I_{\underline{t}}^F(\theta) = \frac{n}{\theta^2}$$

7

$$\pi^J(\theta) \propto \theta^{-1} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}}$$

La loi a priori de Jeffreys est impropre.

$$\pi^J(\theta|\underline{t}) \propto \theta^{-1} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}} \theta^{-n} e^{-\frac{\sum t_i}{\theta}}$$

$$\Rightarrow \pi^J(\theta|\underline{t}) \propto \theta^{-n-1} e^{-\frac{\sum t_i}{\theta}} \mathbb{1}_{\{\theta > 0\}}$$

$$\Rightarrow \theta|\underline{t} \sim IG(n, \sum t_i)$$

Calculons l'espérance de la loi inverse gamma.

$x \sim IG(\alpha, \beta)$ avec $\alpha > 1$

$$\mathbb{E}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{-\alpha+1-1} e^{-\beta/x} dx$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} = \beta/(\alpha-1)$$

Ainsi $\hat{\theta} = \mathbb{E}^{\pi^J}(\theta | \underline{t})$

$$= \boxed{\frac{\sum t_i}{n-1}}$$

(on suppose implicitement que $n \geq 1$).