Examen de rattrapage - Théorie de l'information et de la décision
Partie 2, bayésienne (10 pts)

On rappelle que si la variable aléatoire θ suit une loi Beta de paramètre (a, b), elle admet comme densité

$$\pi(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\mathbb{I}_{\theta\in[0,1]}$$

avec $a > 0$ et $b > 0$.

Exercice 1 (4 pts)

Nous souhaitons estimer la proportion θ des étudiants qui pratiquent une activité sportive au moins 2h par semaine. On se place dans le paradigme bayésien.

1) (2 pts) Modéliser le problème et proposer une loi a priori non informative pour le paramètre θ.

2) (2 pts) Déduire de la question précédente une estimation du paramètre θ lorsque l'on en observe 2/3 sur un échantillon de n étudiants qui pratiquent une activité sportive au moins 2h par semaine.

Exercice 2 (3 pts)

Le nombre r d'arrivés dans une file d'attente suit une loi binomiale négative de paramètre (n, θ)

$$f(r|\theta) = C_{n+r-1}^{n-1}\theta^r(1-\theta)^n\mathbf{1}_{r\in\mathbb{N}}$$

avec $\theta \in]0, 1[$. On suppose n fixé et l'on souhaite estimer θ. On se place dans le paradigme bayésien. Montrer que la famille des lois Beta est conjuguée.

Exercice 3 (3 pts)

Nous considérons un n-échantillon $x_1, \ldots, x_n$ distribué suivant une loi gaussienne d'espérance θ et de variance 1. Nous supposons que θ est distribué suivant une loi gaussienne centrée réduite. Calculer l'estimateur bayésien associé à la fonction de perte quadratique $L(\theta, \delta) = (\theta - \delta)^2$.

Correction Examen de rattrapage HMMA101 Mars 2017

Exercice 1

1) $x|\theta \sim \mathcal{B}(n,\theta)$

$\theta \sim U_{[0,1]}$

2) $\pi(\theta|x) \propto C_n^x \theta^x (1-\theta)^{n-x} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$

$\pi(\theta|x) \propto \theta^x (1-\theta)^{n-x} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$

$\Rightarrow \theta|x \sim Beta(x+1, n-x+1)$

Pour la fonction de perte quadratique, l'estimation de θ est

$$E(\theta|x) = \frac{x+1}{n+2} = \frac{\frac{2n}{3}+1}{n+2} = \frac{2n+3}{3(n+2)}$$

Exercice 2

$n|\theta \sim NB(m,\theta)$

$\theta \sim Beta(a,b)$

$$\pi(\theta|n) \propto \theta^{n}(1-\theta)^{m}\theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1}\,\mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$$

$\Rightarrow \theta|n \sim Beta(n+a, m+b)$

La famille des lois Bêta est donc conjuguée.

Exercice 3

$X_1, ----, X_n|\theta \overset{iid}{\sim} N(\theta,1)$

$\theta \sim N(0,1)$

$\underline{X} = (X_1, ----, X_n)$

$$\pi(\theta|\underline{X}) \propto e^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\theta)^2}\, e^{-\frac{\theta^2}{2}}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\frac{1}{2}\left[(n+1)\theta^2 - 2\theta\sum_{i=1}^{n} x_i\right]}$$

$$\pi(\theta|\underline{x}) \propto e^{-\frac{n+1}{2}\left(\theta - \sum_{i=1}^{n} x_i / n+1\right)^2}$$

$$\Rightarrow \theta|\underline{x} \sim N\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\hat{\theta}_n = \mathbb{E}(\theta|\underline{x}) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n+1}$$