

Examen - Vendredi 24 octobre 2025 - Durée 2h00
Tous documents autorisés, Outils numériques interdits

Exercice 1 (6 pts)

1 (2 pts) La densité de la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$ tronquée sur $[0, 1]$ s'écrit

$$f(x) = \left(\frac{\exp(-x)}{1 - \exp(-1)} \right) \mathbb{I}_{[0,1]}(x).$$

Proposer deux méthodes de simulation, l'une itérative et l'autre non, pour simuler des réalisations suivant cette loi de probabilité.

2 (2 pts) Nous souhaitons estimer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \left\{ \frac{\exp(-x)}{(1+x)} \sin(x) \right\} dx.$$

Proposer deux méthodes Monte-Carlo permettant d'estimer I , l'une basée sur une loi uniforme (estimateur $\hat{I}_N^1$) l'autre basée sur une loi exponentielle tronquée (estimateur $\hat{I}_N^2$). Donner le code R permettant de comparer ces deux méthodes.

3 (2 pts) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre de simulations nécessaires N pour que l'erreur absolue associée à $\hat{I}_N^1$ proposées à la question précédente soit inférieure à 1% avec une probabilité supérieure ou égale à 99%.

Exercice 2 (4 pts)

Décrire la méthodologie mise en oeuvre à l'aide du code R ci-dessous et ce qu'elle vise.

```
Niter <- 10000
f <- function(x) abs(cos(x))*(1+x)

liste <- c()
x <- 0

for (k in 1:Niter)
{
  liste <- c(liste,x)
  y <- rnorm(1,x,2)
  if (y < 2*pi & y > 0)
  {
    u <- runif(1,0,1)
    alpha <- f(y)/f(x)
    if (u < alpha) x <- y
  }
}
```

Exercice 3 (5 pts)

Nous considérons un n -échantillon $X_1, \dots, X_n$ suivant une loi exponentielle de paramètre θ . Les réalisations $x_1, \dots, x_{n-r}$ des $(n-r)$ premières variables aléatoires ont été observées. Par contre, les réalisations des r variables aléatoires suivantes n'ont pas été observées et l'on sait seulement qu'elles ont dépassées une valeur c fixée (données censurées).

Nous supposons que le paramètre θ suit une loi Gamma de paramètres a et b hyper-paramètres connus strictement positifs.

1 (2 pts) Montrer que la fonction de vraisemblance est égale à

$$\theta^{n-r} \exp \left(-\theta \sum_{i=1}^{n-r} x_i \right) \exp(-\theta r c).$$

2 (1 pt) Calculer la loi a posteriori de θ .

3 (1 pt) Donner l'estimateur bayésien de θ associé à la fonction de perte quadratique.

4 (1 pt) Donner un intervalle de crédibilité pour θ de niveau 95%.

Exercice 4 (5 pts)

Lucas et Romain jouent aux boules et s'entraînent aux tirs. Romain prétend pouvoir toucher à 10 mètres 2 fois sur 3. Lucas pense lui que Romain ne touche qu'une boule sur trois. Romain effectue 10 essais et touche cinq boules.

Modéliser le problème et donner la réponse bayésienne. Expliquer en quoi le résultat obtenu est extrêmement intuitif.

①

Corrigé Examens HAX 918X
Vendredi 24 octobre 2025

Exercice 1

$$\underline{1)} \quad f(x) = \frac{e^{-x}}{1-e^{-1}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Méthode 1 : Immersion de la
fonction de répartition

$$\text{Si } x < 0, \quad F(x) = 0$$

$$\text{Si } x \geq 1, \quad F(x) = 1$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{-y}}{1-e^{-1}} dy = \left[\frac{1-e^{-x}}{1-e^{-1}} \right]$$

$$u = \frac{1-e^{-x}}{1-e^{-1}} \Leftrightarrow (1-e^{-1})u = 1-e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow e^{-x} = 1 - (1-e^{-1})u$$

$$\Leftrightarrow x = -\log(1 - (1-e^{-1})u)$$

(2)

$S_i \cup \sim V_{[0,1]}$ values

$$-\log[1 - (1 - e^{-1})U] \sim f()$$

Week 2 Algorithm
Acceptation - Reject

a) Simulate $Y \sim \text{Exp}(1)$

b) $S_i Y \in [0,1]$ values $X = Y$
if not return a)

$$2] I = \int_0^1 \frac{e^{-k}}{(1+k)} \pi(k) dk$$

$$\frac{I_1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{e^{-X_i}}{(1+X_i)} \pi(X_i)$$

$X_1, \dots, X_N \sim V_{[0,1]}$

$$\frac{I_2}{N} = \frac{(1-e^{-1})}{N} \sum_{i=1}^N \frac{\pi(X_i)}{(1+X_i)}$$

$X_1, \dots, X_N \sim f()$

$M_1 \leftarrow \text{unif}(N)$
 $M_1 \leftarrow \text{exp}(-M_1) * \pi(M_1)$
 $1/(1+M_1)$
 $\text{non}(1_1)/N$ (*)
 $M_2 \leftarrow \text{unif}(N)$
 $K \leftarrow -\log(1 - (1 - \exp(-1)))$
 $* M_2$
 $K_2 \leftarrow (1 - \exp(-1)) * \pi(K)$
 $1/(1+K)$
 $\text{non}(1_2)/N$ (**)
 $\text{non comp } (*) \pm$
 $(+*)$

3] D'après l'inégalité de
Bienymy - Tchebychev

(3)

$$P(|\bar{I}_N^1 - I| \leq 0,01) \leq 1 - \frac{V(\bar{I}_N^1)}{(0,01)^2}$$

$$V(\bar{I}_N^1) = \frac{1}{N} \left[\int_0^1 \frac{e^{-2\kappa}}{(1+\kappa)^2} \pi m^2(\kappa) d\kappa - I^2 \right]$$

$$V(\bar{I}_N^1) \leq \frac{1}{N} \int_0^1 \frac{e^{-2\kappa}}{(1+\kappa)^2} \pi m^2(\kappa) d\kappa$$

$$\forall \kappa \in [0,1] \quad \frac{e^{-2\kappa}}{(1+\kappa)^2} \pi m^2(\kappa) \leq 1$$

$$\text{il donc } V(\bar{I}_N^1) \leq \frac{1}{N}$$

Nous cherchons le plus petit volume

$$N \text{ tels que } P(|\bar{I}_N^1 - I| \leq 0,01) \geq 0,99$$

c'est-à-dire le plus petit volume de N
tels que $1 - \frac{V(\bar{I}_N^1)}{10^{-4}} \geq 0,99$

$$\text{telle que } V(\bar{I}_N^1) \leq 10^{-6}$$

$$\text{Comme } V(\bar{I}_N^1) \leq \frac{1}{N} \text{ alors si } N \geq 10^6$$

$$P(|\bar{I}_N^1 - I| \leq 0,01) \geq 0,99$$

Exercice 2

(4)

Distribution aibh

$$f(\kappa) \propto |\log(\kappa)| (1+\kappa)^{-\frac{1}{2}} \mathbb{I}(\kappa) [0, 2\pi]$$

L'algorithm mis en œuvre pour
simuler suivant cette distribution
aibh est l'algorithm de
Hastings-Metropolis à
marché électro en partant
de la valeur $\kappa = 0$

ici la proportion

$N(\kappa^{(+/-)}, 1)$ marche électro
gaussienne

Exercice 3

$$\mathbb{P}(\theta; \kappa_1, \dots, \kappa_n) = \prod_{i=1}^n [\mathbb{P}(x_i | \theta)]$$
$$\frac{n-1}{\prod_{i=1}^n} [\theta e^{-\kappa_i}]$$

(5)

$$V(\theta; \mu_1, \dots, \mu_n) = \theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i}$$

$$\prod_{i=m-n+1}^n \left[\int_0^{\infty} \theta e^{-\theta \mu_i} d\theta \right]$$

$$V(\theta; \mu_1, \dots, \mu_n) = \theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i} \left[e^{-\theta c} \right]^n$$

$$V(\theta; \mu_1, \dots, \mu_n) = \theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i} e^{-nc}$$

$$\int \pi(\theta | \mu_1, \dots, \mu_n) d\theta \propto \theta^{n-1} e^{-\theta \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i} e^{-\theta nc} \pi(\theta)$$

$$\Leftrightarrow \pi(\theta | \mu_1, \dots, \mu_n) \propto \theta^{n-1+\alpha-1} e^{-\theta \left(nc + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i \right)} \frac{\pi(\theta)}{\Gamma(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \theta | \mu_1, \dots, \mu_n \sim \text{Gamma}(n-1+\alpha, nc + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i)$$

$$3) \hat{\theta} = E(\theta | \mu_1, \dots, \mu_n)$$

$$\Leftrightarrow \hat{\theta} = \left[\frac{n-1+\alpha}{nc + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i + 1} \right]$$

4]

6

$$I\left(\frac{1}{\theta}\right) = \left[F^{-1}_{\text{Ga}(a', b')} (0, 025) , F^{-1}_{\text{Ga}(a', b')} (0, 975) \right]$$

$$n \begin{cases} a' = n - n + a \end{cases}$$

$$b' = n\bar{c} + \sum_{i=1}^{n-n} 11_i + b$$

Exercice 4

$$\theta \in \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\}$$

$$\pi | \theta \sim \mathcal{B}(10, \theta)$$

$$\text{Num suppresions } \pi(\theta = \frac{1}{3}) = \pi(\theta = \frac{2}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\pi(\theta = \frac{1}{3} | \pi) \propto \frac{1}{2} C_{10}^{\pi} \left(\frac{1}{3}\right)^{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{10-\pi}$$

$$\pi(\theta = \frac{2}{3} | \pi) \propto \frac{1}{2} C_{10}^{\pi} \left(\frac{2}{3}\right)^{\pi} \left(\frac{1}{3}\right)^{10-\pi}$$

$$\Leftrightarrow \pi(\theta = \frac{1}{3} | \pi = 5) = \pi(\theta = \frac{2}{3} | \pi = 5) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Très intuitif car } \left| \frac{1}{3} - \frac{5}{10} \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{5}{10} \right|$$