Licence Mécanique
Parcours MSM

Projet 6

Consultants : F. Jourdan, R. Mozul
Franck.jourdan@umontpellier.fr
Remy.mozul@umontpellier.fr

Poroélasticité et matériau vivant

Le sujet se place dans le contexte de la poroélasticité. Il s'agit d'étudier un matériau poreux qui se déforme sous la pression d'un fluide interne et des sollicitations extérieures. Comme exemple, on prendra un os. Pour simplifier l'étude, nous considèrerons une structure verticale élancée que nous modéliserons comme une poutre cylindrique verticale. Ce pourrait être la modélisation d'un tibia ou d'un fémur (voir figure ci-dessous).

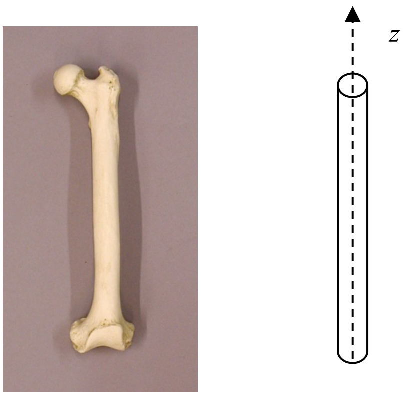

Figure 1

En situation naturelle, l'os baigne dans un liquide dont la pression est notée p. On suppose que l'os est soumis à une charge verticale F, (cette charge correspond au poids de la personne). On note S la section de l'os, L sa hauteur, E son module d'élasticité, M son module de Biot et α son coefficient de Biot. Soit $u(z)$ le déplacement d'un point d'altitude z, la déformation en ce point est $\varepsilon = \frac{du}{dz}$, la dérivée de u par rapport à z. La loi de comportement s'écrit alors

$$\sigma = E\varepsilon - \alpha p$$

où σ est la contrainte dans le matériau. On supposera que la vitesse de Darcy est nulle pour $z=0$ (pas de transfert de fluide) et la pression $P(L,t)=0$. On supposera également que la pression est nulle à t=0.

1) Résolution analytique

On supposera que F est constante.

1.1) En utilisant les lois de la poroélasticité, montrer que l'équation aux dérivées partielles permettant de déterminer la pression $P(z,t)$, s'écrit :

$$C\frac{\partial^2 P(z,t)}{\partial z^2} - \theta\frac{\partial P(z,t)}{\partial t} = \frac{\alpha}{ES}\frac{\partial F(z,t)}{\partial t} \qquad (1)$$

Avec $C = \frac{k}{\mu}$ et $\theta = \frac{\alpha^2}{E} + \frac{1}{M}$

1.2) En utilisant la méthode spectrale, résoudre l'équation (1).
1.3) En déduire la déformation $\varepsilon(z,t)$.

2) Résolution numérique
On note h le pas de discrétisation. On supposera que $F=F(t)$ n'est pas constante.
2.1) En utilisant l'équation (1), donner l'expression de la pression p_{n+1}, obtenue pour une méthode d'Euler explicite.
2.2) En utilisant l'équation (1), donner l'expression de la pression p_{n+1}, obtenue pour une méthode d'Euler implicite.