Prépa concours agro-véto 2020-2021
HLMA509
Dynamique des populations

version légèrement modifiée du polycopié de HLMA609
(auteur : Pierre-Louis Montagard)

David Théret
Université de Montpellier
Faculté des Sciences

26 octobre 2020

Table des matières

Introduction

Ce cours est consacré à l'étude de l'évolution démographique d'une ou plusieurs populations. On souhaite construire des modèles mathématiques qui rendent compte de cette évolution et permettent de faire des prédictions à court ou long terme. On distingue deux grands types de modèles :

- **Les modèles discrets.** Ils sont adaptés aux espèces qui ont une reproduction rythmée dans le temps, à intervalles réguliers par des cycles disjoints (plantes, insectes...) La croissance de ces populations se fait par paliers : on dit qu'elle est « discrète ». Typiquement, la description de l'évolution démographique se fera au moyen d'une suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres : la quantité p_n est le nombre d'individus à l'étape n (souvent une année, mais pas toujours).
- **Les modèles continus.** D'autres espèces se reproduisent « en continu » : les générations se recouvrent (les individus d'une génération ne disparaissent pas tous en même temps), la reproduction n'est pas rythmée. Parfois, le nombre d'individus est tellement grand que déterminer leur population par un nombre *entier* précis n'est pas pertinent (divisions cellulaires). Dans ces conditions, on modélise plutôt l'évolution démographique par une fonction f dépendant du temps : la quantité $f(t)$ est le nombre d'individus à l'instant t.

Le cours est organisé comme suit :

- Dans le chapitre 1, on étudie des modèles discrets pour une population isolée. Mathématiquement, on étudie des **suites numériques**.
- Dans le chapitre 2, on étudie des modèles discrets pour plusieurs populations en interaction (proies-prédateurs par exemple). Mathématiquement, on étudie des **suites vectorielles** ; pour cela, on aura besoin de savoir **diagonaliser** une matrice (première partie du chapitre).
- Le chapitre 3 est la version « continue » du chapitre 1 : étude d'une population en modèle continu. Mathématiquement, on étudie des **équations différentielles**.
- Le chapitre 4 est la version « continue » du chapitre 2 : étude de plusieurs populations en interaction en modèle continu. Mathématiquement, on étudie des **systèmes différentiels**.

1 Modèles discrets (une population)

Dans ce chapitre on considère une population seule (sans compétiteur extérieur, sans prédateur, sans coopérateur...) non divisée en classes (mâles/femelles, matures/immatures...) Le temps est mesuré de manière discrète par un entier naturel n. Au temps n (mesuré en siècles, années, heures...) on note p_n la taille (mesurée en unités, centaines, milliers, millions...) de la population. Cette taille n'est pas connue en général et on essaie de la prévoir à partir de quelques observations sur le terrain. Il faut donc trouver un modèle mathématique qui permette de calculer p_n en donnant des valeurs cohérentes avec les observations. En particulier, on essaie d'avoir la condition $p_n \geq 0$ pour tout n. En revanche, on accepte dans certains cas que p_n ne soit pas un nombre entier : certaines populations nombreuses peuvent être mesurées en milliers, voire en millions, et la considérations de nombres décimaux dans ces cas-là est pertinente.

Dans ce cours, nous allons faire une hypothèse assez forte : supposer que la taille de la population à l'instant $n+1$ dépend uniquement de celle de la population à l'instant n. Mathématiquement, cela signifie qu'il existe une « fonction de croissance » f telle que

$$p_{n+1} = p_n + f(p_n) \tag{1.1}$$

pour tout $n \geq 0$. Pour déterminer la suite (p_n), il faut connaître la population initiale p_0. Mathématiquement on dispose donc d'une **suite définie par récurrence** :

$$\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ p_{n+1} = p_n + f(p_n) \text{ pour } n \geq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Une fois le modèle à notre disposition, nous cherchons principalement à répondre à deux questions. Tout d'abord, quelle est l'évolution de cette population, va-t-elle croître indéfiniment, décroître, alterner des périodes de croissance et de décroissance ? Cela correspond à l'étude des variations de la suite (p_n). L'autre question, qui dépend en partie de la réponse à la question précédente, concerne le devenir de la population sur le long terme. Va-t-elle s'éteindre ? Atteindre une taille limite finie ? Exploser ? Un autre comportement ? Mathématiquement, cela revient à étudier la limite de la suite (p_n) lorsque n tend vers ∞. Les différents cas possibles sont :

1. $p_n \to 0$: extinction ;
2. $p_n \to \ell$ avec $\ell \neq 0$: survie avec saturation ;
3. $p_n \to +\infty$: explosion ;
4. la suite n'a pas de limite !

Évidemment le comportement va fortement dépendre de la fonction de croissance f choisie et, parfois, de la condition initiale. Pour commencer, les zéros de f jouent un rôle important :

Théorème 1 (Les zéros de f sont les candidats)**.** Si la fonction f est continue et si la suite (p_n) a une limite finie ℓ quand $n \to +\infty$, alors $f(\ell) = 0$.

Autrement dit, résoudre l'équation $f(\ell) = 0$ est un réflexe car cela donne les candidats pour les tailles limites. Cela dit, on ne doit pas oublier que la suite peut tendre vers $+\infty$ ou ne pas avoir de limite.

Nous allons étudier 3 grands types de fonction de croissance.

1.1 Croissance linéaire

La fonction de croissance la plus simple est donnée par :

$$\boxed{f(p) = rp}$$

où r est une constante donnée. La suite (p_n) est donc définie par :

$$\begin{cases} p_0 > 0 \text{ donné} \\ p_{n+1} = (1+r)p_n, \end{cases}$$

C'est une suite géométrique ! Pour que les termes de la suite restent positifs, on impose $r > -1$. C'est le **modèle de Malthus** (1766-1834). Quand $r > 0$, la croissance n'est pas freinée et on s'attend à ce que la population augmente indéfiniment. Quand $-1 < r < 0$ on s'attend à ce que la population tende vers zéro. Il reste le cas $r = 0$ où la suite est constante.

Dans ce cas très simple de fonction de croissance, on peut calculer explicitement tous les termes de la suite :

Théorème 2 (Modèle linéaire discret)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$p_n = (1+r)^n p_0.$$

- Si $r > 0$ alors $p_n \to +\infty$, la population explose.
- Si $-1 < r < 0$ alors $p_n \to 0$, la population s'éteint.
- Si $r = 0$ la population est constante et la taille reste égale à p_0.

1.2 Croissance non linéaire

1.2.1 Croissance logistique

Dans le modèle précédent, lorsque $r > 0$, rien ne freine la population et la taille devient infinie. Ceci n'est pas très réaliste... En effet les ressources ne sont pas infinies et il faut « lutter » pour elles. Il y a donc une compétition intraspécifique (i.e. au sein de la même population) pour les ressources. Pour modéliser cela, la fonction de croissance la plus simple est :

$$\boxed{f(p) = rp(1 - p/K)}$$

où $r > 0$ et K sont deux constantes strictement positives. La constante r modélise la « croissance intrinsèque » de la population celle qui ne dépend pas de l'environnement extérieur, et K est la « capacité biotique » du milieu qui vient freiner la croissance. On parle de **croissance logistique** (un logarithme est « caché », nous verrons cela plus tard lorsque nous considérerons le modèle équivalent dans le cadre continu. C'est le **modèle de Verhulst** (1804-1849).

Il s'agit ici d'une croissance non linéaire. En faisant une étude rapide du signe de la fonction f, on voit que si on suppose p positif, alors $f(p)$ est positif lorsque $p \leq K$ (et donc la population est croissante), et $f(p)$ est négative lorsque $p \geq K$ (et dans ce cas la population est décroissante).

Ce modèle est définie par une relation à peine plus compliquée que dans le modèle précédent, et pourtant on va voir que son étude mathématique est beaucoup plus complexe.

Par exemple, on ne connaît pas d'expression simple de p_n en fonction de n comme dans le cas précédent. On va voir également que pour s'assurer que la suite (p_n) reste positive, on doit imposer des restrictions sur p_0 et r. Néanmoins, sans connaître explicitement la suite, on arrive à donner des informations dessus, et notamment à prédire à quelle condition la suite (p_n) admet une limite.

La première étape de cette étude consiste à se ramener au cas ou $K = 1$. Pour cela on considère la nouvelle suite (q_n) définie par $q_n = p_n/K$. On peut voir q_n comme étant le coefficient de « remplissage » relatif à la capacité K.

Il est facile de calculer la relation de récurrence vérifiée par la suite (q_n). La suite p_n vérifie :

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n/K).$$

En remplaçant p_n par Kq_n (et p_{n+1} par Kq_{n+1}), on obtient :

$$Kq_{n+1} = Kp_n + rKq_n(1 - q_n),$$

en simplifiant par K qui est non nul, on obtient la relation suivante :

$$q_{n+1} = q_n + rq_n(1 - q_n).$$

Ceci correspond correspond bien à la relation vérifiée par (p_n) pour $K = 1$.

Le théorème 1 nous donne quatre possibilités concernant la limite de la suite (q_n) : soit $q_n \to 0$, soit $q_n \to 1$, soit $q_n \to +\infty$, soit la suite n'a pas de limite.

Expérimentations (`https://www.desmos.com/calculator/unan9xh0og`)

Le paramètre r va ici s'appeler a... Mais il faut d'abord modifier la fonction : en haut à droite, changer la fonction f en $f(x) = x + ax(1-x)$. En-dessous, vous pouvez modifier la valeur de a et celle de q_0 (qui ici s'appelle x_0...)

1. Prenez $a = 0.8$. Qu'observez-vous lorsque $x_0 = 0.1$? Et pour d'autres valeurs de x_0 ? Combien de comportements différents y a-t-il en fonction de la valeur initiale x_0 ?
2. Mêmes question pour $a = 1.5$.
3. Mêmes question pour $a = 2.5$.
4. Que se passe-t-il pour $a = 2.7$ et $x_0 = 0.1$? Et pour d'autres valeurs de x_0 ?
5. Que se passe-t-il lorsque $a > 3$?

On voit que dans certains cas la suite finit par devenir strictement négative ; la modélisation est donc irréaliste. On cherche par conséquent à comprendre les conditions sur q_0 et r pour lesquelles la suite (q_n) reste positive. Une des façons pour assurer cette condition est d'imposer les inégalités suivantes sur r et p.

Proposition 3. Si $0 < r \leq 3$ et si $0 < q_0 \leq (r+1)/r$, alors pour tout n, on a $0 < q_n \leq (r+1)/r$.

Démonstration. On remarque que l'on a l'égalité : $q_{n+1} = g(q_n)$ avec g la fonction $g(x) = x + rx(1-x)$, que l'on peut aussi écrire $g(x) = -rx^2 + (r+1)x$. On va commencer par vérifier que si $x \in]0, (r+1)/r]$ alors $g(x) \in]0, (r+1)/r]$. Pour cela on remarque d'abord que la fonction g s'annule en deux points $x_1 = 0$ et $x_2 = (r+1)/r$, et qu'elle est positive entre ces deux points. Donc si $x \in]0, (r+1)/r]$, on a bien $g(x) \geq 0$. Ensuite, en faisant un simple calcul de dérivée $g'(x) = -2rx + r + 1$, on constate que la fonction g est croissante sur $]-\infty, (r+1)/2r]$ est décroissante sur $](r+1)/2r, +\infty]$. La fonction g admet donc un maximum pour $x_0 = (r+1)/2r$ et ce maximum est égal à :

$$g((r+1)/2r) = -r((r+1)/2r)^2 + (r+1)(r+1)/2r = (r+1)^2/4r.$$

Remarquons maintenant que si $r \leq 3$ alors $r+1 \leq 4$ et $(r+1)/4 \leq 1$, on en déduit donc que pour $x \in]0, (r+1)/r]$, on a :

$$g(x) \leq (r+1)^2/4r = ((r+1)/r)\,((r+1)/4) \leq (r+1)/r.$$

La fin de la démonstration se fait par une récurrence. Par hypothèse, on a donc que $p_0 \in]0, (r+1)/r]$; supposons maintenant que pour tout entier $k \leq n$ on ait $q_k \in]0, (r+1)/r]$, alors $q_{n+1} = g(p_n) \in]0, (r+1)/r]$, d'après la première partie de la preuve appliquée pour $x = q_n$, et la propriété est bien démontrée. □

Exercice. Vérifier, sur les expérimentations précédentes, que la « valeur initiale limite » de stabilité est bien $(r+1)/r$.

Dans la suite on suppose donc $q_0 \in]0,(r+1)/r]$ et $r \in]0,3]$. Mais selon les valeurs de r, le comportement de la suite (q_n) peut varier de très simple à extrêmement compliqué... Pour $0 < r \leq 2$, le théorème qui suit dit que la situation est assez simple.

Théorème 4 (Modèle logistique discret)**.** Si $0 < r \leq 2$, la suite (q_n) converge vers 1 et on a donc survie avec saturation. Plus précisément :

- Si $0 < r \leq 1$ alors $q_n \to 1$ avec $q_n \leq 1$ (sauf éventuellement q_0 qui peut être plus grand que 1.)
- Si $1 < r \leq 2$ alors on a encore $q_n \to 1$, mais cette fois la convergence se fait avec des termes qui sont alternativement en dessous et au-dessus de 1.

Exercice. Vérifier en expérimentant.

Remarque. Montrer ce théorème n'est pas très difficile, on le fait comme dans la démonstration de la propriété précédente. Nous verrons en exercice un cas particulier.

Par contre quand $r > 2$ le comportement de la suite devient beaucoup plus complexe, nous en dirons juste quelques mots très vagues sans définir précisément les notions mathématiques. La suite est d'abord périodique avec un nombre fini de valeurs d'adhérences (c'est à dire une valeur dont la suite s'approche une infinité de fois). Le nombre de ces valeurs d'adhérence augmente avec r. Au dela d'un certain seuil, le système devient chaotique, c'est à dire que des modifications infinitésimales de la condition initiale p_0 peut conduire à des suites aux comportement complètement différents. Notons que cette complexité va disparaître lorsqu'on va considérer le modèle continu équivalent. Néanmoins, du point de vue de la biologie, les phénomènes oscillants voire chaotiques peuvent être observés et les modèles discrets permettent d'en rendre compte.

Pour aller plus loin, aller à `http://tuvalu.santafe.edu/~joshua/?section=3` et cliquer sur « Dynamics sandbox »...

1.2.2 Croissance bistable ou avec seuil : effet Allee

Dans le modèle de Verhulst, la croissance est maximale à faible taille de population. Néanmoins, dans certains cas, à population faible la croissance peut être freinée (effet Allee faible) voire négative (effet Allee fort) par exemple parce qu'il est alors difficile de trouver un partenaire sexuel ou que les recombinaisons génétiques sont insuffisantes, ou qu'il est plus difficile de lutter contre l'environnement (ex : manchots sur la banquise)... Pour modéliser cet effet Allee fort, on peut introduire un effet de seuil dans le modèle précédent de Verhulst. On se donne un seuil $0 < \theta < 1$ de sorte que si p est inférieur à un seuil θ alors la population décroit, si p est supérieur à θ alors la population croît. Le prototype d'une telle fonction de croissance est :

$$\boxed{f(p) = rp(1-p)(p-\theta)}$$

où $r > 0$ est une constante. Il s'agit ici d'une croissance non linéaire. C'est un « modèle bistable ».

Le Théorème 1 nous dit déjà que soit $p_n \to 0$, soit $p_n \to \theta$, soit $p_n \to 1$, soit $p_n \to +\infty$, soit la suite n'a pas de limite. On a

$$\begin{cases} 0 < p_0 < 1 \text{ donné} \\ p_{n+1} = p_n + rp_n(p_n - \theta)(1 - p_n). \end{cases}$$

On n'en dira pas plus sur le modèle bistable discret mais on se rattrapera sur le modèle bistable continu dans un chapitre suivant.

1.3 Exercices

Exercice 1 (Suite arithmétique)**.** En 2000, l'île de Ré compte 10 000 aigrettes. Chaque année elle gagne 100 aigrettes.

1. Quel est votre pronostic sur le devenir de la population d'aigrettes ? Extinction ? Survie avec saturation ? Explosion ? Autre ?

   On note p_n le nombre d'aigrettes (comptées en milliers) l'année $2000 + n$.
2. Que vaut p_0 ?
3. Ecrire une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
4. Calculer p_n en fonction de n. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} p_n$.

Exercice 2 (Suite géométrique)**.** En 2000, l'île de Ré compte 10 000 aigrettes. Chaque année 5% des oiseaux disparaissent. Reprendre les questions de l'exercice précédent.

Exercice 3 (Suite arithmético-géométrique)**.** En 2000, une petite ville compte 10 000 habitants. Chaque année 5% des habitants migrent vers la grande ville, mais 100 nouveaux habitants arrivent. On note p_n le nombre d'habitants l'année $2000 + n$.

1. Déterminer la fonction f telle que
$$p_{n+1} = p_n + f(p_n).$$
2. Déterminer l'unique nombre ℓ vers lequel la suite (p_n) peut tendre.
3. On pose $v_n = p_n - \ell$. Trouver une relation de récurrence entre v_{n+1} et v_n. Calculer v_n en fonction de n.
4. Calculer p_n en fonction de n. Quel est le devenir de la population de la ville ?

Exercice 4 (Explosion)**.** On donne

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = p_n + p_n^2. \end{cases}$$

1. Quels sont les comportements possibles de la suite (p_n) quand $n \to +\infty$?

2. Montrer que la suite est croissante.
3. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Exercice 5 (Modèle logistique discret)**.** On considère le modèle logistique discret avec $r = 1$:

$$\begin{cases} 0 < p_0 < 1 \text{ donné} \\ p_{n+1} = p_n + p_n(1-p_n). \end{cases}$$

Dans ce cas précis ($r = 1$) on va montrer le Théorème 4, c'est à dire $p_n \to 1$ (survie avec saturation).

1. Construire le tableau de variations de la fonction g définie par
$$g(x) = x + x(1-x) = 2x - x^2.$$
En déduire que $0 < p_n < 1$ pour tout entier n.
2. Montrer que la suite (p_n) est croissante.
3. En déduire que $p_n \to 1$.
4. Que se passe t il si $p_0 = 2$? Et si $1 < p_0 < 2$? Et si $p_0 > 2$?

Exercice 6 (Suite de Fibonacci)**.** On considère la suite récurrente définie par

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1}. \end{cases}$$

décrivant une population de lapins.

1. Calculer les premiers termes. Quel est votre pronostic ?
2. Montrer que la suite est croissante. En déduire que $u_n \to +\infty$.
En fait on peut calculer tous les termes. Allons y !
3. Déterminer les réels $\alpha < \beta$ solutions de $x^2 - x - 1 = 0$.
4. Déterminer les réels A et B pour que la suite (v_n) définie par
$$v_n = A\alpha^n + B\beta^n,$$
vérifie $v_0 = v_1 = 1$.
5. Montrer que la suite (v_n) vérifie le problème initial de Fibonacci. Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} v_n$.

Exercice 7 (Examen 2014-2015)**.**

1. On considère le modèle discret pour une population suivant
$$\begin{cases} w_0 \text{ donné} \\ w_{n+1} = \frac{1}{2} w_n. \end{cases}$$
Quelle est la fonction de croissance f qui permet d'écrire $w_{n+1} = w_n + f(w_n)$? Quel type de croissance est ce ? De quelle type est la suite (w_n) ? Calculer w_n. Quel est le devenir de cette population ?

2. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} q_0 = 1 \\ q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + 2. \end{cases}$$

   En un mot que se passe-t-il par rapport au modèle précédent ? En posant $w_n = q_n - 4$ montrer qu'on se ramène au cas précédent. En déduire q_n. Quel est le devenir de cette population ?

3. On considère le modèle discret pour une population suivant

$$\begin{cases} p_0 = 1 \\ p_{n+1} = \frac{2p_n}{4p_n+1}. \end{cases}$$

   Proposer un changement « $q_n =$ une fonction de p_n » qui permet de se ramener au cas précédent. Quel est le devenir de cette population ?

2 Modèles discrets, plusieurs populations

Dans le chapitre précédent, une seule population était étudiée, sans distinction en sous-groupe (par la taille ou le sexe ou l'âge...) Dans ce cas, les suites récurrentes sont l'outil de base.

Dans le but d'étudier plusieurs populations qui interagissent ou une population découpée en sous-groupes , nous avons besoin de l'outil « matrices ». Ce chapitre est donc un peu théorique mais il prendra tout son sens pratique dans les applications pour plusieurs populations dans le cas discret ainsi que dans le cas continu.

2.1 Matrices

2.1.1 Définitions et exemples

Définition 5. Une **matrice** réelle A est un tableau rectangulaire de nombres réels, appelés **coefficients** de la matrice, organisés en **lignes** et **colonnes**. Une matrice à n lignes et p colonnes est dite de **taille** (n,p) ou $n \times p$. Chaque case du tableau est occupée par un nombre réel appelé **coefficient**.

Le coefficient situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne est appelé coefficient à la position (i,j) et est en général noté a_{ij}. De manière générale, une matrice de taille $n \times p$ est notée :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le coefficient a_{ij} est situé sur la i-ème ligne et la j-ème colonne. Sous forme condensée, on écrit aussi $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,p}}$. Par exemple,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 2 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

est une matrice réelle de type 2×4, avec $a_{21} = 4$ et $a_{13} = -5$.

Matrices particulières La **matrice nulle** $0_{n,p}(\mathbb{R})$ est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls. On la note aussi 0 tout simplement. Par exemple :

$$0_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad 0_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une **matrice ligne**, ou **vecteur ligne**, est une matrice qui n'a qu'une seule ligne. De même, une **matrice colonne**, ou **vecteur colonne**, est une matrice qui n'a qu'une seule colonne. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement une matrice ligne (à 4 colonnes)et une matrice colonne (à 3 lignes). Les lignes (respectivement les colonnes) d'une matrice sont souvent vues comme des matrices lignes (respectivement comme des matrices colonnes).

Une **matrice carrée** d'ordre n est une matrice qui est de type $n \times n$. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$$

est carrée d'ordre 3. La **diagonale** d'une matrice carrée $A = (a_{ij})$ est constituée des coefficients a_{ii} pour $i = 1, \ldots, n$. Par exemple, la diagonale de la matrice précédente est constituée des nombres 0, 5 et 1. Une **matrice diagonale** est une matrice carrée dont les coefficients situés en dehors de la diagonale sont tous nuls. Par exemple, la matrice suivante est diagonale :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

On écrit parfois $\text{diag}(1, 2, 3)$ pour désigner cette matrice.

Des matrices carrées particulièrement importantes sont les **matrices identité** I_n, définies pour chaque entier $n \geq 1$ par :

$$I_n = \text{diag}(1, \ldots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Enfin, une **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) est une matrice carrée dont les coefficients situés en dessous (respectivement au-dessus) de la diagonale sont tous nuls. Par exemple :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire supérieure}} \quad \text{et} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire inférieure}}$$

2.1.2 Addition de matrices

Définition 6 (Addition)**.** Soient A et B deux matrices de même taille (n, p). Alors la somme $A + B$ est la matrice C obtenue en additionnant « coefficient par coefficient » :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}}$$

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

⚠ On ne peut additionner deux matrices que si elles ont même taille !

Proposition 7. Pour des matrices A, B, C de même taille $n \times p$:

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A + 0_{np} = A$

2.1.3 Produit d'une matrice par un nombre

Définition 8. Soient A une matrice $n \times p$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ un nombre. Alors λA est la matrice obtenue en multipliant tous les coefficients de A par λ :

$$\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} \tag{2.2}$$

Par exemple :

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ 9 & -3 & 3 \end{bmatrix}.$$

On pose aussi :

$$-A := (-1)A \quad \text{et} \quad A - B := A + (-B)$$

Proposition 9. Soient A, B des matrice $n \times p$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$
2. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$
3. $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$
4. $A + (-A) = 0_{np}$
5. $0A = 0_{np}$ et $1A = A$

2.1.4 Produit de matrices

Commençons par définir le produit (dans cet ordre) d'une matrice ligne par une matrice colonne ayant le même nombre de coefficients :

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} := a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Comme souvent, le produit est écrit par simple juxtaposition. Le résultat est un nombre, qu'on peut aussi voir comme une matrice « ponctuelle » à 1 ligne et 1 colonne.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (1 \times 2) + (2 \times 0) + (3 \times (-1)) = -1$$

A partir de ce produit « élémentaire », on peut définir le produit général de deux matrices.

Définition 10. Soient $A = (a_{ij})$ une matrice de taille (n, p), et $B = (b_{ij})$ une matrice de taille (p, q). Alors le **produit** AB (« A fois B » dans cet ordre ⚠) est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille (n, q) où c_{ij} est le produit « élémentaire » de la i-ème ligne de A par la j-ème colonne de B :

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{ip} b_{pj}.$$

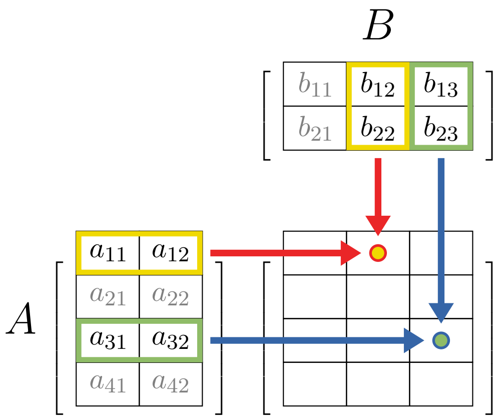
La figure 2.1 montre le produit d'une matrice A de type 4×2 par une matrice B de type 2×3. Cette disposition en diagonale des matrices A et B peut être utile pour débuter :

Remarque. ⚠ La multiplication de deux matrices est une opération qui a un un *ordre* ! Le produit BA n'est pas pas forcément défini et, s'il l'est, n'est a priori pas égal au produit AB. De plus, on ne peut multiplier deux matrices que si le nombre de colonnes de la matrice de gauche est égal au nombre de lignes de la matrice de droite.

Exemple.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA.



$$c_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22}$$

$$c_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23}$$

FIGURE 2.1 – Produit d'une matrice 4×2 par une matrice 2×3

Proposition 11. Soient A et A' de taille $n \times p$, B et B' de taille $p \times q$, C de taille $q \times r$. Alors :

1. $A(BC) = (AB)C$
2. $A(B + B') = AB + AB'$
3. $(A + A')B = AB + A'B$
4. $I_n A = A I_p = A$

⚠ Attention, certaines règles de calcul « usuelles » ne sont pas vraies pour les matrices, en tout cas pas sans hypothèses supplémentaires. Par exemple :

- En général, on a $AB \neq BA$ même si les deux produits sont définis et donnent des matrices de même taille.
- On peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$ (ici 0 désigne la matrice nulle).
- De l'égalité $AB = AC$, on ne peut pas déduire $B = C$.

Exemple. Calculer $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

Exemple. Calculer le produit $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

Exemple. Calculer AB et AC pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$. Qu'observe-t-on ?

2.1.5 Matrices inversibles

Tout nombre réel a non nul possède un inverse a^{-1} relativement à la multiplication, c'est-à-dire un nombre a^{-1} tel que $a \times a^{-1} = a^{-1} \times a = 1$. La situation est différente pour les matrices carrées. La matrice identité I_n joue le rôle, parmi les matrices carrées d'ordre n, d'élément unité pour la multiplication : on a $A \times I_n = I_n \times A = I_n$ pour toute matrice A de même que l'on a $a \times 1 = 1 \times a = a$ pour tout nombre réel. De même, la matrice nulle d'ordre n (matrice dont tous les coefficients sont nuls) joue le rôle de « zéro ». Mais on voit facilement que la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, qui est bien non nulle, ne possède pas d'inverse, c'est-à-dire qu'il n'existe aucune matrice B de taille 2×2 telle que $AB = BA = I_2$... Et si vous pensez que cette matrice est « un peu nulle » en raison de sa première ligne, essayez-donc avec $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{smallmatrix}\right)$...

Définition 12. Une matrice carrée de taille $n \times n$ est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B de même taille telle que $AB = I_n$ et $BA = I_n$. Dans ce cas B est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

Remarques. ⚠

1. On voit facilement qu'il ne peut exister qu'une seule matrice B qui vérifie la condition de la définition : si $AB = AB' = BA = B'A = I_n$, alors $B = BI_n = B(AB') = (BA)B' = I_nB' = B'$. C'est ce qui justifie la notation A^{-1} lorsque A est inversible.
2. En fait, on peut démontrer que, pour deux matrices A, B carrées $n \times n$, on a $AB = I_n$ si et seulement si $BA = I_n$ (ce qui n'est pas évident, car en général les produits AB et BA ne sont pas égaux). Donc, pour montrer que A est inversible et que son inverse est B, il suffit de montrer que $AB = I_n$, ou que $BA = I_n$.
3. Si A est inversible, alors A^{-1} est également inversible, et $(A^{-1})^{-1} = A$!
4. La matrice identité I_n est inversible et égale à son inverse, puisque $I_n \times I_n = I_n$.
5. Parler de l'inverse d'une matrice qui n'est pas carrée n'a pas de sens !

2.1.6 Déterminant d'une matrice carrée et inversibilité

Le déterminant d'une matrice carrée est un nombre qui, en particulier, permet de savoir si la matrice est inversible ou non. Pour simplifier, nous allons nous limiter aux matrices 2×2 et 3×3.

Définition 13. Le **déterminant** d'une matrice 2×2 est donné par :

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := ad - bc \tag{2.3}$$

Le **déterminant** d'une matrice 3×3 est donné par :

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh \tag{2.4}$$

Le théorème suivant est très utile :

Théorème 14. Une matrice carrée A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exercice 9. Etudier l'inversibilité des matrices :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Inverser une matrice inversible

Une fois qu'on sait que A est inversible (car on a constaté que $\det(A)$ est différent de zéro), on voudrait calculer A^{-1}. Pour cela, le plus général est de résoudre le système linéaire associé à la matrice. On l'explique sur un exemple :

Exemple. Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. On lui associe le système linéaire :

$$\begin{cases} 4x + 2y + z = a \\ 2x + y \phantom{{}+z} = b \\ 3x + 2y + z = c \end{cases}$$

dans lequel x, y, z sont les inconnues et a, b, c sont des paramètres. La résolution de ce système montre qu'il possède une unique solution quels que soient a, b, c, donnée par $x = a - c$, $y = -2a + b + 2c$ et $z = a - 2b$. Autrement dit :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{Y} \quad \iff \quad \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}}_{Y}$$

On en déduit que $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Exercice 10. . Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 11. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer A^{-1}.

2.1.7 Diagonalisation

Pourquoi diagonaliser ? Nous aurons bientôt besoin de savoir calculer les puissances successives A^n ($n \in \mathbb{N}$) d'une matrice carrée A (disons de taille 2×2). Si par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

alors on peut bien calculer les premières puissances :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 41 & 16 \\ -32 & -7 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 223 & 98 \\ -196 & -71 \end{pmatrix} \quad A^4 \begin{pmatrix} 1169 & 544 \\ -1088 & -463 \end{pmatrix}$$

mais on sent bien que les calculs vont rapidement être un peu compliqués...

- Notons d'abord qu'il est facile de connaître les puissances d'une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. On vérifie facilement par une récurrence simple que :

$$D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$$

  De même pour une matrice 3×3.
- Supposons maintenant qu'on puisse écrire

$$\boxed{A = PDP^{-1} \quad \text{avec } D \text{ diagonale et } P \text{ inversible.}} \tag{2.5}$$

  Alors

$$\begin{aligned} A^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \cdots (PDP^{-1}) \\ &= PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D \cdots DP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

  Mais on a vu au-dessus comment calculer D^n lorsque D est diagonale ; pour obtenir A^n, il suffit donc de multiplier D^n par P^{-1} à droite et par P à gauche.

Ainsi écrire (2.5) devient un objectif intéressant. Si une telle écriture existe alors on dit que la matrice est diagonalisable. Sinon, elle n'est pas diagonalisable...

Définition 15 (Matrice diagonalisable)**.** Soit A une matrice carrée de taille n. On dit que A est **diagonalisable** s'il existe une écriture (2.5). Dans ce cas les nombres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ qui apparaissent sur la diagonale de D s'appellent les **valeurs**

propres de la matrice A (attention, ils peuvent être nuls, et n'ont aucune raison d'être tous distincts).

Comment diagonaliser ?

Nous venons de voir une motivation pour diagonaliser une matrice (on en verra une deuxième au chapitre suivant). Maintenant, il faut apprendre à diagonaliser (quand c'est possible !)

Diagonalisation, mode d'emploi

Diagonaliser une matrice A signifie trouver une matrice P inversible et une matrice diagonale D (donc les valeurs propres) telles que $A = PDP^{-1}$. Il faut donc trouver P, P^{-1} et D. La procédure ci-dessous marche toujours lorsque la matrice A est diagonalisable (et, évidemment, échoue lorsque A ne l'est pas !)

1. **Trouver les valeurs propres** : ce sont les solutions de $\det(A - \lambda I) = 0$ (équation polynômiale de degré n). En cas de racines multiples, la racine correspondante doit être répétée autant de fois que sa multiplicité ; ceci fournit donc une liste de n valeurs propres $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$;
2. **Calculer une base de vecteurs propres** : pour chaque $i = 1, \ldots, n$, trouver un vecteur X_i non-nul tel que $AX_i = \lambda_i X_i$ (vecteur propre pour la valeur propre λ_i),de telle sorte que, en juxtaposant les vecteurs $X_1, \ldots, X_n$, on obtient une matrice P inversible (et P^{-1} par inversion).
3. **Conclusion** : un succès aux deux étapes précédentes assure que la matrice A est diagonalisable. La matrice diagonale D a pour coefficients diagonaux $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *rangés dans le même ordre que les vecteurs propres* $(X_1, \ldots, X_n)$ *formant les colonnes de* P.

⚠ Attention, toutes les matrices ne sont pas diagonalisables (ce serait trop simple) !

Notons qu'il y a cependant un cas où on est sûr que la matrice A est diagonalisable :

Proposition 16. Si A est une matrice carrée de taille n et si A admet n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Attention, beaucoup de choses fines sont cachées ici ! Si on veut tout dire et tout expliquer, on a besoin de beaucoup plus d'heures... Néanmoins les deux exemples suivants sont très éclairants. Si vous savez diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et si vous comprenez pourquoi $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable, alors vous avez fait un grand pas !

Il y a autre chose que nous avons occulté ici : même si les coefficients de la matrice sont réels, les valeurs propres peuvent être des nombres complexes. Dans ce cas, même si les calculs sont un tout petit peu plus délicats, ils peuvent être fait de la même façon. On obtient les coefficients des puissances de la matrice A où apparaissent des nombres complexes, mais après simplification, ces nombres complexes disparaissent et on obtient des coefficients réels.

2.1.8 Exercices sur le calcul matriciel et la diagonalisation

Exercice 12 (Opérations sur les matrices)**.** Dans chacun des cas suivant, calculer la matrice $A+B$ (si cette somme est possible) et les matrices AB et BA (si ces produits sont possibles).

1. Calculer $A+B$ et $B+A$ pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
2. Calculer AB et BA pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Que constatez-vous ?
3. Calculer AB et AC pour $A = \left(\begin{smallmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $B = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $C = \left(\begin{smallmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ Que constatez-vous ?
4. Faire le produit de $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $B = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Exercice 13 (Produit avec les matrices identité)**.** Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$. Par quelle matrice identité peut-on multiplier A par la gauche ? Qu'obtient-on ? Même question en multipliant à droite de A. Généraliser à une matrice de taille quelconque.

Exercice 14 (Puissance d'une matrice diagonalisable)**.** On se donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits PQ, QP, QAP. En déduire le calcul de A^n pour n entier quelconque.

Exercice 15 (Puissance d'une matrice diagonalisable)**.** On se donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits PQ, QP, QAP. En déduire le calcul de A^n pour n entier quelconque.

Exercice 16 (Inversibilité)**.** Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 5 \\ 0 & 8 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 17 (Calcul de l'inverse)**.** Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles, puis calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 18 (Calcul de l'inverse)**.** Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leur inverse :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 19 (Diagonalisation)**.** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet deux valeurs propres qui sont 2 et -1.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire le calcul des puissances de A.

Exercice 20 (Diagonalisation)**.** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet deux valeurs propres qui sont 3 et 1.
2. Diagonaliser A.
3. En déduire le calcul des puissances de A.

Exercice 21 (Trigonalisation)**.** On considère la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que A admet une valeur propre « double » qui est 1.
2. Chercher tous les vecteurs propres associés à la valeur propre 1 ; en déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Soit P la matrice suivante :
$$P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
Vérifier que P est inversible et que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire supérieure égale à
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. Montrer que
$$T^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
5. En déduire le calcul des puissances de A.

2.2 Application des matrices à l'étude de plusieurs populations

Dans le chapitre précédent, pour étudier une population on devait étudier une suite récurrente. On va ici s'intéresser à plusieurs populations (ou une population divisée en sous groupes) qui interagissent. On va donc se retrouver avec des suites récurrentes couplées qu'on va pouvoir écrire sous forme matricielle. Si la matrice est diagonalisable alors on pourra « découpler » le système et tout calculer ! On va expliquer ça sur les matrices de Leslie puis faire des exercices.

Remarque. Nous avons vu au chapitre précédent que, pour une seule suite récurrente, le caractère non linéaire peut déjà apporter du chaos. Aussi, pour simplifier, nous allons étudier uniquement des modèles linéaires (d'où l'utilisation des matrices).

2.2.1 Matrice de Leslie

On considère une population structurée en classes d'âge de longueurs toutes égales. Cette longueur est également utilisée pour mesurer le temps de manière discrète. Par exemple, on divise une population d'animaux en 3 sous-groupes : ceux ayant $0-10$ ans (nombre donné par une suite (x_n)), $10-20$ ans (nombre donné par une suite (y_n)), $20-30$ ans (nombre donné par une suite (z_n)). Disons que la condition initiale (c-à-d la donnée de x_0, y_0 et z_0) correspond à l'année 2000. Alors x_n est la taille du sous-groupe des $0-10$ ans en $2000+10n$ etc... Le point essentiel c'est que toute l'information sur la population est contenue dans le vecteur (c-à-d une matrice de taille 3×1) :

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{le vecteur population}}.$$

Chez ces animaux, on suppose que le groupe 1 est trop jeune pour se reproduire, que le groupe 2 se reproduit avec un taux de fécondité égal à 1, que le groupe 3 se reproduit avec un taux de fécondité égal à 5. On suppose que la probabilité qu'un individu du groupe 1 survive jusqu'au groupe 2 est 0,2 et que la probabilité qu'un individu du groupe 2 survive jusqu'au groupe 3 est 0,5. On peut alors faire un schéma de cycle de vie et écrire le système linéaire :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 5z_n \\ y_{n+1} = 0,2x_n \\ z_{n+1} = 0,5y_n \end{cases}$$

qu'on réécrit sous la forme matricielle

$$X_{n+1} = AX_n, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0,2 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

La matrice A est la **matrice de Leslie** du système. La récurrence (2.6) est l'équivalent dans le cas de « plusieurs populations » de la suite géométrique rencontrée précédemment dans le cas d'une seule population. La matrice A joue le rôle de la « raison » et on a :

$$\boxed{X_n = A^n X_0.}$$

Ainsi si on sait calculer les puissances de A alors on sait calculer le vecteur X_n pour tous les n, et ainsi accéder à la taille des sous-groupes pour chaque n. Sait on calculer A^n ? Oui si, par exemple, A est diagonalisable. C'était la raison d'être du Chapitre 2 ! Évidemment il reste du travail (cf les exercices ci-dessous) mais on comprend qu'on a les bons outils et que, moyennant de la rigueur et un peu de temps, on pourra se débrouiller !

2.2.2 Le comportement asymptotique d'un modèle de type Leslie

Dans les exercices 24 et 25, on voit que dans un modèle de type Leslie, le comportement sur le long terme des tailles des sous-populations est donné par la plus grande des valeurs propres. On remarque aussi que les coefficients du vecteur propre associé à cette plus grande valeur propre permet de calculer la proportion des tailles de chacune des classes sur le long terme. Nous allons voir que ceci est un phénomène général, mais avant il faut passer un peu de temps pour définir « la plus grande des valeurs propres ». Pour cela, il faut considérer l'ensemble des valeurs propres d'une matrice, et comme déjà expliqué précédemment, pour éviter l'existence de matrices sans valeurs propres, il est commode de considérer l'ensembles des valeurs propres réelles ou complexes.

Nous allons donc commencer par expliquer rapidement quelques notions sur les nombres complexes.

Les nombres complexes

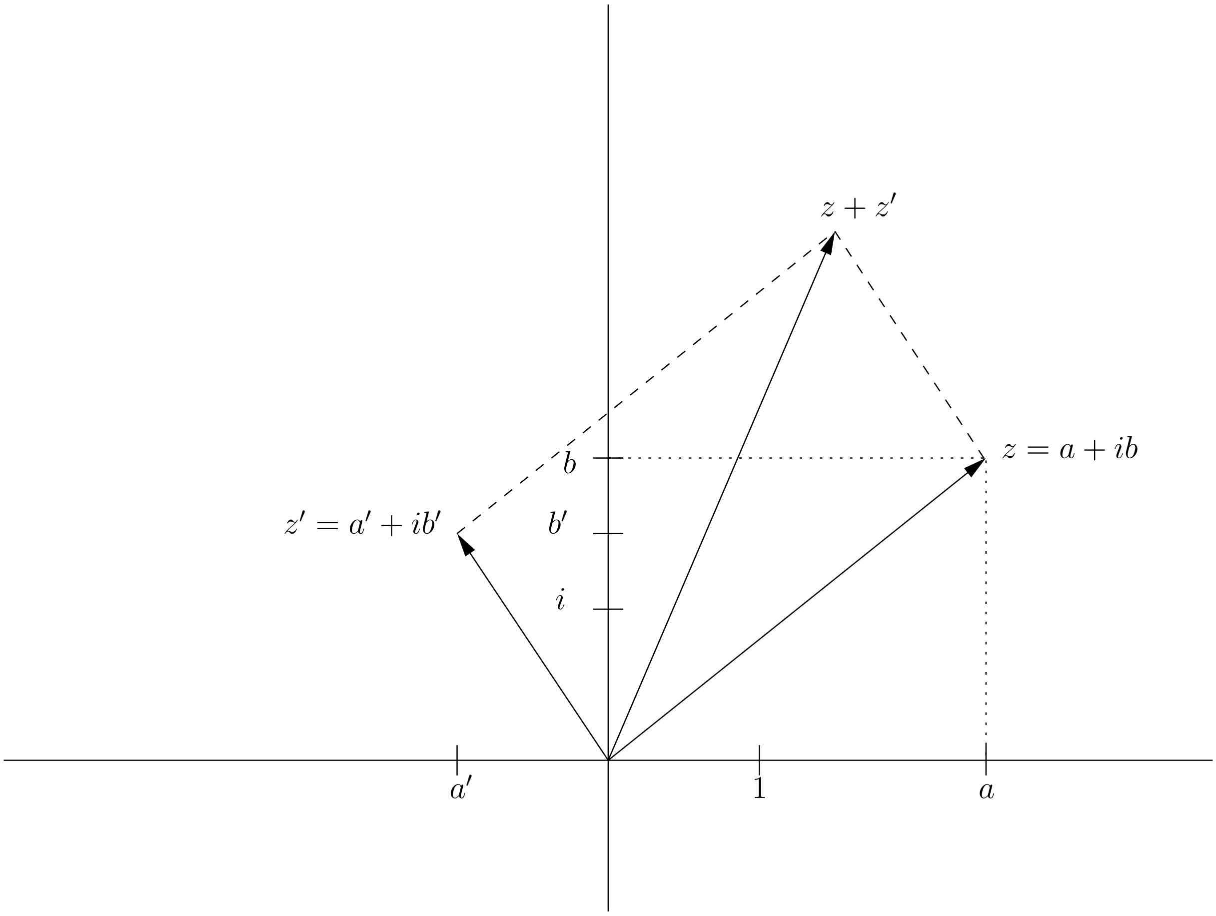
Les nombres usuels que l'on considère lorsqu'on mesure des longueurs, des températures, des masses est l'ensemble des nombres réels (noté $\mathbb{R}$). Cet ensemble contient tous les nombres entiers, les fractions de nombres entiers, et aussi beaucoup d'autres nombres comme $\pi, \sqrt{2}, \exp, \ldots$ Pourtant, dans cet ensemble, des équations très simples telles que $x^2 + 1 = 0$ n'ont pas de solution. Au cours du dix-huitième siècle, les mathématiciens ont « inventé » un ensemble de nombre plus grand : l'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$. Dans $\mathbb{C}$ l'équation ci-dessus admet deux solutions, solutions que l'on note i et $-i$. Par définition, on a donc $i^2 = (-i)^2 = -1$. Mais il y a d'autres nombres complexes ! En fait, tous les nombres complexes s'écrivent sous la forme $z = a + ib$ avec a et b des nombres « ordinaires », c'est à dire des nombres réels. Et on peut additionner et multiplier ces nombres en utilisant les règles d'addition et de multiplication usuelles sur les réels avec l'égalité supplémentaire $i^2 = -1$. En pratique, on a pour l'addition :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b'),$$

et pour la multiplication (un peu plus compliquée) :

$$(a+ib)(a'+ib') = aa'+aib'+iba'+ibib' = aa'+ab'i+ba'i+bb'i^2 = (aa'-bb')+i(ab'+ba').$$

Remarquons que les nombres complexes sont une extension des nombres réels, c'est à dire que si $b = 0$, alors on a $z = a$ et dans ce cas, l'addition et la multiplication ci-dessus sont tout simplement l'addition et la multiplication « ordinaire ». Il existe un point de vue géométrique qui rend ces nombres complexes un peu plus concrets, en les interprétant comme des points du plan. À tout nombre complexe $z = a + ib$, on peut associer le point du plan de coordonnées (a, b). Les nombres réels sont alors les points sur l'axe des abscisses (l'axe horizontal), et les nombres complexes qui s'écrivent $z = ib$ sont les nombres sur l'axe des ordonnées (l'axe vertical). Ces derniers nombres s'appellent les nombres imaginaires. On peut faire un dessin pour illustrer tout cela voir la figure 2.2.2.



Un résultat remarquable des nombres complexes est qu'en rajoutant ce nombre imaginaire i, racine du polynôme $P(X) = X^2 + 1$, alors tout les polynômes à coefficients réels (et même complexes) de degré n ont exactement n racines si on les compte avec multiplicité. Précisons cela :

Théorème 17. Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ un polynôme à coefficients réels (ou complexes) de degré n (c'est à dire $a_n \neq 0$), alors il existe des nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_q$ distincts et des entiers $n_1, n_2, \ldots, n_q$ dont la somme vaut n et tels que :

$$P(X) = a_n(X-\lambda_1)^{n_1}(X-\lambda_2)^{n_2}\dots(X-\lambda_p)^{n_p}.$$

Par exemple, si A est une matrice de Leslie de taille n, alors son polynôme caractéristique admet n racines complexes comptées avec multiplicités. Pour désigner parmi ces racines, « celle » qui sera la plus grande, on va définir une dernière notion : le module d'un nombre complexe. Si $z = a + ib$ est un nombre complexe, on appelle module de z, noté $|z|$, le nombre positif $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$. Ici encore, cela généralise un notion existante sur les réels. Si $z = a$ alors $|z| = \sqrt{a^2}$ est égal à la valeur absolue de a. Dans l'interprétation géométrique des nombres complexes comme point du plan, le module d'un nombre complexe $z = a+ib$ est tout simplement la distance entre l'origine et le point de coordonnées (a, b). Si deux nombres complexes sont de même module, ils sont à la même distance de l'origine, c'est à dire qu'ils sont tous les deux sur un même cercle centré en l'origine.

Le comportement asymptotique d'un modèle de type Leslie

Nous pouvons maintenant revenir à la situation qui nous intéresse : on considère une population structurée en n classes de taille respective à l'instant k : $(p_1)_k, (p_2)_k, \dots, (p_n)_k$. On regroupe toutes ces classes en une matrice colonne (le vecteur population) P_k :

$$P_k = \begin{pmatrix} (p_1)_k \\ (p_2)_k \\ \vdots \\ (p_n)_k \end{pmatrix}.$$

On connaît la population initiale P_0 et l'évolution entre l'année $k+1$ et l'année k est donnée par :

$$P_{k+1} = AP_k,$$

où A est une matrice carrée de taille n (la matrice de Leslie). On note $(p_{tot})_k = (p_1)_k + (p_2)_k + \dots + (p_n)_k$ la population totale au temps k.

Rappelons que $\chi_A(X)$ est le polynôme caractéristique de A ; il est de degré n. Soient $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_q)$ ses racines réelles ou complexes de multiplicités $n_1, n_2, \dots, n_q$. On va ranger ces racines valeurs suivant leur module, c'est à dire on va supposer que $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_q|$.

On va faire une hypothèse qui va nous permettre de pouvoir prédire le comportement de la taille des classes sur le long terme.

Proposition 18. Supposons que les hypothèses suivantes soient vérifiées :

1. la valeur propre λ_1 est réelle et strictement positive ;
2. sa multiplicité est égale à 1 ;

3. si V_1 est le vecteur propre associé, défini par :

$$V_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

alors on a $a_i > 0$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$;

4. tous les coefficients du vecteur initial P_0 sont strictement positifs,

alors on a les résultats qui suivent.

1. Le module $|\lambda_1|$ gouverne le comportement sur le long terme des classes des populations, à savoir si $\lambda_1 < 1$ alors les tailles de toutes les classes vont tendre vers 0, si $\lambda_1 = 1$, les tailles des classes vont tendre vers une valeur finie, et si $\lambda_1 > 1$ alors les tailles de toutes les classes vont tendre vers l'infini.
2. De plus la proportion sur le long terme de chacune des classes parmi la population totale est donnée par les coefficients de V_1, c'est à dire que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{(p_i)_k}{(p_{tot})_k} = \frac{a_i}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}.$$

Cet énoncé peut paraître un peu technique, mais il faut se rappeler qu'il est très général. On ne va pas chercher à faire une démonstration, même si cela serait possible à votre niveau. L'ingrédient essentiel pour faire cette démonstration est que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n$ on a $\lambda_1 > |\lambda_i|$ et donc $|\lambda_i|/\lambda_1 < 1$ ce qui assure que la suite $(|\lambda_i|/\lambda_1)^n$ tend vers 0.

J'attends juste que vous compreniez l'énoncé (pensez à regarder les exemples vus en exercice : exercices 24 et 25).

Une remarque importante : pour prédire le comportement asymptotique de la population, on n'a pas besoin ici de supposer que la matrice est diagonalisable, il suffit même de connaître la plus grande des valeurs propres. Par contre, si on veut connaître le comportement transitoire (comment se dirige t-on vers le comportement asymptotique) il faut connaître les autres valeurs propres.

Les hypothèses qui sont faites dans la propriété précédente peuvent paraître surprenante. Pourtant, dans les exemples que nous avons rencontré, elles sont vérifiées. Ceci provient du fait que dans les exercices la matrice A est choisie de petite taille $n \leq 3$ et de sorte que les calculs soient faisables à la main, mais pas seulement ! En effet, pour une large classe de matrice de Leslie, les hypothèses 1 à 3 de la propriété sont vérifiées. C'est ce que nous dit le théorème de Perron-Frobenius. Si A est une matrice, on dira que A est positive si tous ses coefficients sont positifs, et strictement positive si tous ses coefficients sont strictement positifs.

Théorème 19. Le théorème de Perron-Frobenius Soit A une matrice strictement positive ou plus généralement A une matrice dont une puissance est strictement positive. Supposons que ses valeurs propres soient ordonnées par leur module comme expliqué ci-dessus. Alors la valeur propre λ_1 est **réelle et strictement positive** ; sa multiplicité n_1 est égale à 1, et si V_1 est un vecteur propre (non nul) associé à λ_1, alors les coefficients de V_1 sont strictement positifs.

Les matrices de Leslie ont en général des coefficients positifs ou nuls et pas strictement positifs, mais dans beaucoup de cas, il existe une puissance de A strictement positive, et le théorème de Perron-Frobenius nous permet d'utiliser la propriété 18 et d'obtenir des résultats sur le comportement asymptotique des tailles des classes.

2.3 Exercices

Exercice 22 (Modèle matriciel de taille 2)**.** On considère la population d'un pays, divisée en une population rurale et en une population urbaine. On note R_n et U_n les populations rurales et urbaines à l'année n, a le taux d'exode rural annuel et b le taux d'exode urbain (supposés constants). Montrer que cette situation conduit aux équations $R_{n+1} = (1-a)R_n + bU_n$ et $U_{n+1} = aR_n + (1-b)U_n$. Écrire ces équations sous forme matricielle. Diagonaliser la matrice obtenue en prenant $a = 0,2\,\mathrm{an}^{-1}$, $b = 0,1\,\mathrm{an}^{-1}$. Calculer R_n et U_n pour tous les n et en déduire leur comportement en grand temps.

Exercice 23 (Modèle matriciel de taille 2)**.** On veut étudier une population de chauve-souris. On s'intéresse uniquement aux nombres de femelles. Une étude antérieure sur un échantillon de 9 individus femelles a permis de vérifier que ces 9 chauve-souris donnaient naissance à 12 chauve-souris (dont 6 femelles) et qu'une seule (sur 9) survivait la première année. A partir de la deuxième année, les chauve-souris sont plus prolifiques : chacune donne naissance à deux chauve-souris par an (en moyenne 1 mâle et 1 femelle). On a enfin constaté que sur 3 individus âgés d'un an et plus, deux seront vivants un an plus tard.

1. En utilisant les hypothèses ci-dessus, modéliser l'évolution des effectifs entre l'année n et l'année $n+1$.
2. Vérifier que la matrice qui encode cette évolution est la suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1/9 & 2/3 \end{pmatrix}.$$
3. Trouver les valeurs propres de cette matrice. Calculer les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.
4. A est elle diagonalisable ? Si oui diagonaliser la.
5. En déduire l'évolution de la population en fonction du nombre d'années écoulées et des populations initiales à l'instant initial.

6. Que se passe t il en temps grand ?

Exercice 24. [Modèle matriciel de taille 2, d'après "Mathématiques et statistiques pour les sciences de la nature", G. Biau, J. Droniou, M. Herzlich] On considère une population d'animaux sauvages divisée en deux classes d'âge, (les jeunes et les adultes), et l'on appelle $e_i(n)$ $i = 1, 2$ les effectifs dans la i-ième classe d'âge au temps n, f_i et m_i le taux de natalité et de mortalité des individus de la classe i, et enfin p_1 la proportion d'individus passant de la classe 1 à la classe 2.

1. Écrire la matrice A telle que : $E(n+1) = AE(n)$ où $E(n)$ est le vecteur : $\begin{pmatrix} e_1(n) \\ e_2(n) \end{pmatrix}$.
   En déduire que $E(n) = A^n E(0)$.
2. On prend ici $f_1 = 0$, $p_1 = 1/2$, $m_1 = 1/4$, $f_2 = 2$ et $m_2 = 3/4$. On admet que les valeurs propres sont $5/4$ et $-3/4$. Diagonaliser la matrice A et en déduire $E(n)$ en fonction de n et des conditions initiales $e_1(0), e_2(0)$.
3. Montrer qu'avec les choix précédents des constantes $f_1, p_1, \ldots$, et pour tout valeur initiale $P(0)$ non nulle, lorsque t tend vers l'infini, le rapport $e_1(t)/e_2(t)$ tend vers une limite égale à $a/a + b$, où a, b sont les coefficients du vecteur propre correspondant à la valeur propre $5/4$.

Exercice 25. [Modèle matriciel de taille 3] On veut étudier l'évolution d'une population d'insectes que l'on suppose structurée en trois classes d'âge : les larves, les adultes et les insectes âgés. L'unité de temps choisie est la semaine et on note x_n, y_n et z_n l'effectif des larves, des adultes et des individus âgés en début de semaine n.

1. La matrice qui modélise l'évolution de la population entre la semaine n et la semaine $n + 1$ est la suivante :
   $$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 9/4 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & 1/4 \end{pmatrix}.$$
   En une ou deux phrases, faire des hypothèses sur l'évolution des populations qui pourraient conduire à cette matrice.
2. Trouver les valeurs propres de cette matrice. Calculer les vecteurs propres associés à chacune de ces valeurs propres.
3. A est elle diagonalisable ? Si oui diagonaliser la.
4. En déduire une expression explicite de x_n, y_n, z_n en fonction des conditions initiales x_0, y_0, z_0.
5. On note $p_n = x_n + y_n + z_n$ la population totale. Montrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{p_n} = \frac{12}{17}.$$

Exercice 26 (Modèle matriciel de taille 2, puis 3)**.** Le Cincle plongeur est un passereau des ruisseaux de montagne. Ses caractéristiques démographiques sont les suivantes : les oiseaux sont adultes au bout d'un an, le sex-ratio est équilibré à la naissance, chaque année les femelles de plus d'un an pondent en moyenne un œuf, le taux de survie entre 0 et 1 an est de $0,5$, et il est de $0,4$ au-delà d'un an. Modéliser l'évolution démographique du cincle plongeur. Trouver les valeurs propres de la matrice. En déduire le devenir de la population.

Des observations plus élaborées conduisent en fait à distinguer les oiseaux dont l'âge est compris entre 1 et 2 ans de ceux de plus de 2 ans. On constate alors que 20% des femelles entre 1 et 2 ans et 60% des femelles au-delà de 2 ans se reproduisent, et qu'elles pondent en moyenne 4 œufs par an, indépendamment de leur âge. Enfin, le taux de survie des plus de 2 ans est en fait estimé à $0,6$ (celui des 1-2 ans restant estimé à $0,4$). Comment le modèle ci-dessus est-il modifié ? Déterminer le devenir de la population.

Solution ; première partie.

Dans cette première partie, la population est structurée en deux classes : les moins d'un an dont les effectifs à l'année n seront notés j_n et les plus d'un an dont les effectifs seront notés a_n. On va considérer ici la population totale (voir remarque plus bas). Entre l'année $n+1$ et l'année n la population varie comme suit :

$$\begin{array}{rcll} j_{n+1} & = & & 1/2 a_n \\ a_{n+1} & = & 1/2 j_n & +4/10 a_n \end{array}.$$

Pour la première équation, chaque femelle donne naissance à un œuf (mâle ou femelle), mais comme il y a autant de mâles que de femelles, il faut deux individus (1 mâle et 1 femelle) pour faire un œuf, d'où le $1/2$. Pour la deuxième équation, on retrouve comme adultes, d'une part les jeunes qui ont survécu (taux de survie $1/2$) et les déjà adultes (taux de survie de $0,4$). Matriciellement ces équations s'écrivent :

$$\begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$$

où A est la matrice définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 4/10 \end{pmatrix}.$$

Remarquons que si on décide de compter les femelles, les équations sont exactement les mêmes ; en effet chaque femelle donne naissance à $0,5$ *femelle puisqu'on suppose que le sex-ratio est équilibré ; par contre, il y aura une différence au niveau des conditions initiales.*

Calculons maintenant le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A(X) = \det \begin{pmatrix} -X & 1/2 \\ 1/2 & 4/10 - X \end{pmatrix} = -X(4/10 - X) - 1/4 = X^2 - 4/10\,X - 1/4.$$

Calculons le discriminant de cette équation :

$$\Delta = (-4/10)^2 - 4(-1/4) = 16/100 + 1 = \frac{16+100}{100} = 116/100.$$

Ici pour la première fois, nous sommes dans un cas où la racine carrée de Δ n'est pas un nombre entier, et où les racines ne seront pas entière non plus. Notons que c'est ce qui arrive le plus souvent ; mais cela ne change en rien les calculs. On a deux valeurs propres qui sont :

$$\lambda_1 = \frac{4/10 + \sqrt{116/100}}{2} = 0,2 + \sqrt{1,16}/2,$$

et

$$\lambda_2 = 0,2 + \sqrt{1,16}/2.$$

On peut calculer une valeur approchée de ces valeurs propres : $\lambda_1 \simeq 0,74$ et $\lambda_2 = \simeq -0,34$. Comme ici on me demande juste de donner le devenir de la population, on peut utiliser la propriété 18. On a deux valeurs propres et la plus grande en valeur absolue est inférieure à un, donc la population va disparaître sur le long terme. On peut chercher la répartition asymptotique des populations respectives, c'est à dire la limite suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{j_n}{j_n + a_n}.$$

Pour cela, il nous fait calculer un vecteur propre associé à la valeur propre λ_1. Un vecteur (x, y) est vecteur propre si ses coordonnées vérifient le système d'équation :

$$\begin{array}{rcl} 0,5y & = & \lambda_1 x \\ 0,5x + 0,4y = \lambda_1 y & & \end{array}.$$

Ce qui est équivalent au système suivant :

$$\begin{array}{rcl} \lambda_1 x - 0,5y & = & 0 \\ 0,5x + (0,4 - \lambda_1)y & = & 0. \end{array}$$

Comme dans les situations précédentes, on a bien ici deux équations qui sont multiples l'une de l'autre, même si cela ne se voit pas au premier coup d'œil. Si on a confiance en ses calculs, on peut par exemple utiliser la première équation, on pose $x = 1$, ce qui nous donne $y = \lambda_1/0,5 = 2\lambda_1$, on a donc choisi comme vecteur propre le vecteur $V_1 = (1, 2\lambda_1) \simeq (1; 1,48)$. On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{j_n}{j_n + a_n} = 1/(1 + 2\lambda_1) \simeq 0,40$$

Remarque : On peut se rassurer en vérifiant que les deux équations qui définissent

les vecteurs propres sont bien proportionnelles. Commençons par un point général. Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 unitaire (le coeffient devant X^2 est égal à 1), et soient λ_1, λ_2 ses deux racines. Alors on peut écrire :

$$X^2 + bX + c = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2) = X^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2.$$

En identifiant les deux polynômes on a les égalités $\lambda_1\lambda_2 = c$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = -b$.

Revenons à notre cas : ici on a donc $\lambda_1\lambda_2 = -0,25$ et $\lambda_1 + \lambda_2 = 0,4$. Multiplions la première équation du système qui donne les valeurs propres par λ_2 :

$$\lambda_2(\lambda_1 x - 0,5y) = \lambda_1\lambda_2 x - 0,5\lambda_2 y = 0.$$

Grâce aux remarques ci-dessus, on a donc obtenu :

$$-0,25x - 0,5(0,4 - \lambda_1)y = 0.$$

Si on multiplie cette dernière équation par -2, on obtient bien la deuxième équation du système.

Deuxième partie Dans cette partie, les calculs sont un peu plus délicats, je ne les détaillerai pas. Je donnerai juste la matrice de Leslie.

Ici nous avons maintenant trois classes. Nous noterons les effectifs à l'année n par j_n, a_n, v_n. La matrice de Leslie est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,4 & 1,2 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Notons qu'en utilisant un logiciel de calcul, on vérifie que cette matrice a trois valeurs propres distinctes, une réelle qui vaut à peu près $0,85$ et deux complexes de module plus petit. Comme la plus grande des valeurs propres est positive mais inférieure ou égale à 1, dans ces conditions la population va également s'éteindre.

Exercice 27. On veut prédire l'évolution d'une population structurée en trois classes que l'on observe chaque année ;

- les individus de moins d'un an, dont l'effectif à l'année n sera notée j_n ;
- les individus entre un et deux ans, dont l'effectif à l'année n sera noté a_n ;
- les individus de deux ans et plus dont l'effectif à l'année n sera noté v_n. L'évolution entre l'année n et l'année $n + 1$ est donnée par la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 10 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

1. Expliquer en quelques mots la signification biologique des coefficients de la matrice A.
2. Calculer le polynôme caractéristique de A et vérifier qu'il est égal à :

$$\chi_A(X) = -(X - 9/2)(X^2 + 1).$$

3. Calculer les trois valeurs propres de A.
4. En utilisant la propriété 18, déduire le comportement asymptotique de la population en général, ainsi que la répartition entre les trois classes sur le long terme.

Exercice 28 (Examen 2014-2015)**.** On veut étudier l'évolution d'une population de mammifères. On modélise cette évolution en faisant les hypothèses qui suivent. La population est structurée en trois classes d'âge : les jeunes qui ont moins de 10 ans, les adultes entre 10 et 20 ans et les individus âgés de plus de 20 ans. Jusqu'à 30 ans la mortalité est négligeable, puis une fois l'âge de 30 ans atteint, tous les individus meurent rapidement. Seuls les adultes se reproduisent : entre 10 et 20 ans, on estime que chaque individu femelle donne naissance à 8 jeunes (le sex-ratio sera supposé égal à un). On observe la population sur des intervalles de 10 ans. On note x_n, y_n et z_n les effectifs respectifs des jeunes, des adultes et des individus âgés à l'année $10n$. Par exemple, y_3 est égal au nombre d'individus adultes au bout de 30 années.

1. Justifier le fait que la matrice qui modélise l'évolution des trois classes de la population entre l'année $10n$ et l'année $10(n+1)$ est la matrice suivante :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
2. Montrer que $\det(A - \lambda I) = -\lambda(\lambda^2 - 4)$.
3. En déduire que les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$,$\lambda_3 = -2$.
4. Calculer un vecteur propre non nul X_1, X_2, X_3 associé à chaque valeur propre.
5. En déduire une matrice de passage P, son inverse P^{-1}, et une matrice diagonale D telle que telle que $A = PDP^{-1}$ soit diagonale.
6. En déduire une expression explicite de x_n, y_n, z_n en fonction des conditions initiales x_0, y_0, z_0.

3 Modèles continus (une population)

3.1 Présentation du problème

Nous reprenons le cheminement de la première partie (modèles discrets), mais, cette fois, le temps est mesuré de manière « continue » par un réel $t \geq 0$; au temps t on note $p(t)$ la taille de la population.

Une manière d'arriver aux modèles continus que nous allons étudier est de les voir comme « limite » de modèles discrets.

1. Supposons que le temps s'écoule de manière discrète à intervalles de temps de longueur Δt. En partant du temps $t = 0$, nous aurons ainsi des observations aux temps $0, \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \ldots$ Supposons de plus que l'accroissement de la population entre les temps t et $t + \Delta t$ soit proportionnel au temps écoulé Δt avec un coefficient de proportionnalité qui dépende de la population au temps t :
$$p(t + \Delta t) = p(t) + f(p(t))\Delta t \tag{3.1}$$
Ici $f(p(t))$ est un nombre réel, le coefficient de proportionnalité variable. Observons que (3.1) peut se réécrire :
$$\frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = f(p(t)) \tag{3.2}$$
2. Supposons maintenant que l'intervalle de temps Δt devienne de plus en plus petit, et passons à la limite dans (3.2). Nous obtenons :
$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{p(t + \Delta t) - p(t)}{\Delta t} = f(p(t)) \tag{3.3}$$
autrement dit
$$p'(t) = f(p(t)) \tag{3.4}$$

Ainsi, la fonction p est solution de l'équation suivante :
$$y'(t) = f(y(t)). \tag{3.5}$$

Cette équation dont l'inconnue est une fonction y et qui fait intervenir la dérivée de cette inconnue s'appelle une **équation différentielle ordinaire d'ordre 1** (que l'on résume en **EDO** d'ordre 1). Ce type d'équation admet en général une infinité de solutions. Pour avoir une seule solution, on impose une condition initiale, par exemple la valeur de la fonction en $t = 0$; dans le cas d'une population, cela correspond à la population initiale, notée p_0. L'équation plus la donnée de la condition initiale s'appelle le **problème de Cauchy**.

Remarque. Plus généralement, on peut rencontrer des cas où l'évolution dépend de la taille de la population (de y), mais aussi du temps t. On considère donc le problème de Cauchy général suivant :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ y'(t) = f(t, y(t)), \end{cases} \tag{3.6}$$

où f est une fonction qui dépend de deux variables.

3.1.1 Un peu de théorie

Qu'est-ce qu'une solution du problème de Cauchy ? C'est la donnée d'une *fonction*

$$\begin{array}{rccc} y: & I & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & y(t) \end{array} \tag{3.7}$$

définie sur un intervalle I contenant 0, dépendant d'une variable t (le temps), telle que $y(0) = y_0$ et $y'(t) = f(t, y(t))$ pour tout $t \in I$.

Une solution définie sur un intervalle I peut éventuellement être prolongée sur un intervalle J plus grand. Si on ne peut pas faire ce type de prolongement on dit que la solution est **maximale**. Nous allons maintenant énoncer une version d'un théorème mathématique très puissant qui assure dans notre cas que si l'on fixe l'évolution de la population (par l'équation) et la condition initiale y_0, alors il existe une unique solution maximale de l'équation qui vérifie $y(0) = y_0$.

Théorème 20. Théorème de Cauchy-Lipschitz On suppose que par rapport à la deuxième variable la fonction f est dérivable et que sa dérivée est continue, alors pour tout y_0 il existe une unique solution maximale du problème de Cauchy.

La démonstration de ce théorème est difficile et dépasse largement le cadre de cours. Cependant, son énoncé est important dans notre contexte. Traduisons-le : si on sait comment la population évolue et si on connaît la population initiale, alors il n'y a qu'une façon d'évoluer. Dans le cas discret, on a le même type de résultat mais il est beaucoup plus facile à montrer.

Ainsi, pour peu que la fonction f qui gouverne l'évolution soit « raisonnable », on peut parler de *la* solution de l'équation vérifiant la condition initiale donnée.

3.2 EDO linéaires d'ordre 1

En général, même si on sait que les solutions d'une EDO existent, on ne sait pas les calculer. Il existe cependant une famille d'équations que l'on sait résoudre, c'est la famille des EDO linéaires d'ordre 1 que vous avez déjà rencontrée en L1. Rappelons leur définition et la méthode pour les résoudre.

Une **EDO linéaire d'ordre 1** s'écrit

$$(E): \; y'(t) = a(t)y(t) + b(t),$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont des fonctions données et où on cherche les solutions $y(t)$.

La résolution de telles équations se fait en se ramenant à des calculs de primitives. Revenons rapidement sur cette notion.

Définition 21. Si f est une fonction quelconque donnée, et si F est dérivable et vérifie $F'(t) = f(t)$ alors on dit que F est une **primitive** de f.

⚠ Rappelons qu'une primitive n'est jamais unique. En effet si F est une primitive de f et si c est une constante quelconque, alors $F + c$ est aussi une primitive de f.

Une primitive est en fait une solution d'une équation différentielle. En effet, si on se donne la fonction f, alors les primitives de f sont les solution de l'équation $y'(t) = f(t)$. Remarquons qu'en cohérence avec le théorème de Cauchy-Lipschitz, si on veut l'unicité de la primitive, il faut et il suffit d'imposer une condition initiale : il existe une unique fonction F solution de :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \text{ donné} \\ y'(t) = f(t). \end{cases} \tag{3.8}$$

Cette solution est *la* primitive F telle que $F(0) = y_0$.

Pour résoudre les EDO linéaires, on doit connaître les primitives des fonctions usuelles. Voici un tableau qui en recense quelques-unes à retenir.

Fonction f	Primitive F (plus constante)
$x \to x^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$	$x \to \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1}$
$x \to x^{-1} = \frac{1}{x}$	$x \to \ln\|x\|$
$x \to e^x$	$x \to e^x$
$x \to \ln(x)$	$x \to x\ln(x) - x$
$x \to \cos(x)$	$x \to \sin(x)$
$x \to \sin(x)$	$x \to -\cos(x)$

Les règles suivantes permettent aussi de se simplifier souvent la vie : si F est une primitive de f et G est une primitive de g, alors :

- une primitive de $f + g$ est $F + G$
- si λ est une constante, une primitive de λf est λF
- si a est une constante, une primitive de $x \to f(x + a)$ est $x \to F(x + a)$
- si a est une constante non-nulle, une primitive de $x \to f(ax)$ est $x \to \frac{1}{a} F(ax)$.
- Si g est dérivable, une primitive de $g'(x)f(g(x))$ est $F(g(x))$.

On peut maintenant rappeler comment résoudre une EDO linéaire d'ordre 1.

Résolution de (E), mode d'emploi

1. **Résoudre l'équation homogène** (H) obtenue « en enlevant le terme $b(t)$ », c-à-d.
$$(H) : \ y'(t) = a(t)y(t).$$
Les sol. de (H) sont $t \mapsto Ce^{A(t)}$ où A est une primitive de a, C une constante « libre ».
2. **Trouver une solution particulière de l'équation** (E)**.** Dans la plupart des cas qu'on va rencontrer on peut en « deviner » une ou presque...
3. **Les sol. de (E) = les sol. de (H) + la sol. particulière de** (E) **trouvée.**

Ainsi les solutions de (E) sont du type

$\boxed{t \mapsto Ce^{A(t)} + z(t)}$ où $\boxed{C \text{ constante libre, } A \text{ une primitive de } a,\ z \text{ une solution de } (E).}$

Il y en a une infinité (car C est libre !).

Résolution du problème de Cauchy associé à (E), mode d'emploi

Parmi l'infinité des solutions de (E), la condition initiale vient « fixer » la constante C, sélectionnant ainsi une unique solution.

Remarque. 1. Pour le point 2., si on ne « devine » pas alors il existe une méthode générale, appelée **variation de la constante**. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(t) = C(t)e^{A(t)}$ (on fait « varier » la constante C du point 1.). On injecte dans (E) et on voit que y est solution particulière à condition que $C'(t) = b(t)e^{-A(t)}$. En prenant une primitive du membre de droite, on trouve $C(t)$ et donc on a une solution particulière $y(t) = C(t)e^{A(t)}$ de (E).

2. La méthode générale permet donc de résoudre les EDO linéaire d'ordre 1, à condition de savoir calculer des primitives. Mais ce n'est pas toujours possible. Par exemple, si on considère la fonction densité de la loi normale centrée réduite :
$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-t^2}{2}),$$
on sait qu'elle admet une primitive, mais on sait aussi montrer que cette primitive ne peut pas s'exprimer avec les fonctions usuelles. Autrement dit, les solutions de l'équation :
$$y'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-t^2}{2})$$
ne s'expriment pas à l'aide des fonctions usuelles, et c'est pourtant une EDO linéaire d'ordre 1.

Exercice 29 (Mise en pratique du mode d'emploi)**.** Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $y'(t) = 2y(t) + 1$, $y(0) = \frac{1}{2}$.
2. $y'(t) = y(t) + t$, $y(0) = 0$.
3. $y'(t) = ty(t) - t$, $y(0) = 2$.
4. $y'(t) = (1 + t)y(t) - 2t - t^2$, $y(0) = 2$.
5. $y' = e^t y(t) + e^t$, $y(0) = e - 1$.

3.3 Les EDO non linéaires, généralités, points d'équilibre.

Revenons maintenant au cas général. Par souci de simplification, nous allons cependant supposer que la fonction de croissance ne dépend pas du temps. L'effectif d'une population est alors solution d'un problème de Cauchy du type :

$$\begin{cases} y(0) = y_0 > 0 \text{ donné} \\ y'(t) = f(y(t)) \end{cases} \tag{3.9}$$

où f est une fonction de croissance quelconque. Comme nous l'avons vu en début de chapitre, ces équations admettent une unique solution (théorème de Cauchy-Lipschitz), solution que l'on ne sait pas expliciter en général. Sans connaître les solutions, on peut cependant comprendre le devenir de la population, en essayant de calculer la limite de $p(t)$ quand $t \to +\infty$ (si $p(t)$ n'explose pas avant... cf exercice 30). Évidemment le comportement va fortement dépendre de la fonction de croissance f choisie et, parfois, de la condition initiale. Comme dans la première partie, les limites possibles des solutions de l'EDO, si elles sont finies, sont à chercher parmi les zéros de f.

Définition 22. Les **équilibres** de l'équation différentielle $y' = f(y)$ sont les zéros de f, c-à-d. les solutions l de $f(l) = 0$.

Remarquons qu'un point d'équilibre définit une solution constante. En effet, si l est un point d'équilibre et si on considère la fonction $y(t) = l$ pour tout t positif, alors comme cette fonction est constante, on a $y'(t) = 0$ et y est bien solution.

Ces solutions ne sont pas les plus intéressantes (elles sont constantes), mais elles sont très utiles pour décrire le comportement des autres solutions lorsque $t \to +\infty$. D'abord remarquons que le théorème de Cauchy-Lipschitz implique la propriété suivante :

Proposition 23 (Les équilibres sont des frontières)**.** Si une solution touche un équilibre l à un temps t_0 alors $p(t) = l$ pour tous les temps ! Dit autrement la solution d'un problème de Cauchy ne partant pas d'un équilibre ne peut jamais toucher un équilibre.

On peut prédire le comportement des solutions qui s'approche des points d'équilibre.

Théorème 24 (Stabilité, instabilité)**.** Soit l un équilibre.

- si $f'(l) > 0$ alors l'équilibre l est *instable* : si la condition initiale est proche de l alors la solution est chassée ;
- si $f'(l) < 0$ alors l'équilibre l est *stable* : si la condition initiale est proche de l alors la solution est attirée par l (et elle tend vers l en temps grand).

Pour illustrer ce principe un peu vague, nous allons reprendre les 3 grands types de fonction de croissance étudiées au Chapitre 1.

3.4 Croissance linéaire

La fonction de croissance la plus simple est donnée par

$$\boxed{f(p) = rp}$$

où r est une constante. On a donc le problème de Cauchy linéaire et à coefficients constants

$$\begin{cases} y(0) = y_0 > 0 \text{ donné} \\ y'(t) = ry(t). \end{cases}$$

Dans ce cas, on connaît la solution, et il y a trois alternatives.

Théorème 25 (Modèle linéaire continu)**.** La solution du problème de Cauchy est

$$p(t) = p_0 e^{rt}$$

- Si $r > 0$ on a $p(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, soit explosion.
- Si $r = 0$, alors la population est constante.
- Si $r < 0$ on a $p(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, soit extinction.

On retrouve un comportement identique au cas correspondant discret. Cependant les solutions ont des expressions différentes.

3.5 Croissance non linéaire

3.5.1 Croissance logistique

Pour modéliser la compétition intraspécifique (i.e. au sein de la même population), on considère une population qui vérifie l'équation suivante :

$$P'(t) = rP(t)(1 - P(t)/K),$$

où r et K sont des constantes strictement positives.

Comme dans le cas discret, en faisant le changement d'inconnues $p(t) = P(t)/K$, et on est ramené au cas suivant :

$$p'(t) = rp(t)(1 - p(t))$$

C'est le cas que nous allons considérer maintenant, qui conduit au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = ry(1-y) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Dans ce cas il y a deux points d'équilibre : 0 qui est instable et 1 qui est stable. Les équilibres étant des frontières, on a :

- si $0 < p_0 < 1$ alors $0 < p(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$;
- si $1 < p_0$ alors $1 < p(t)$ pour tout $t \geq 0$.

Ensuite, un petit raisonnement qualitatif montre que $p(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$. Ceci dit, dans ce cas on peut calculer explicitement la solution du problème de Cauchy.

Théorème 26 (Modèle logistique continu)**.** La solution du problème de Cauchy est

$$p(t) = \frac{p_0 e^{rt}}{1 - p_0 + p_0 e^{rt}}.$$

Quand $t \to +\infty$, on a $p(t) \to 1$, soit survie avec saturation.

Remarque. Ici, il peut être utile de se rappeler que le modèle logistique discret est beaucoup plus complexe et plus riche. Notamment, on a trouvé des solutions, qui « franchissent » le point d'équilibre, ce qui n'arrive pas ici.

3.5.2 Croissance bistable ou avec seuil : effet Allee

Pour modéliser un effet Allee fort, on prend

$$\boxed{f(p) = rp(p - \theta)(1 - p/K)}$$

où $K > 0$, $0 < \theta < K$, $r > 0$ et

$$p'(t) = rp(t)(p(t) - \theta)(1 - p(t)/K)$$

On peut ici comme précédemment se ramener au cas où $K = 1$ et on veut donc étudier le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' = ry(1-y)(y-\theta) \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Ici aussi on peut résoudre l'équation et arriver à une relation implicite pas si facile à expliciter. Aussi nous allons plutôt faire un raisonnement qualitatif. Les équilibres sont 0 (stable), θ (instable) et 1 (stable), et donc nous avons trois cas :

- si $0 < p_0 < \theta$ alors $0 < p(t) < \theta$ pour tout $t \geq 0$;
- si $\theta < p_0 < 1$ alors $\theta < p(t) < 1$ pour tout $t \geq 0$.
- si $p_0 > 1$ alors $p(t) > 1$ pour tout $t \geq 0$.

Ensuite on voit que, comme annoncé, θ représente un seuil au sens où la position de la condition initiale par rapport à θ détermine le devenir de la population.

Théorème 27 (Modèle bistable continu)**.** Si la taille initiale est trop petite, la population va s'éteindre. Plus précisément :

- Si $0 < p_0 < \theta$ alors $p(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$, soit extinction.
- Si $\theta < p_0 < 1$ alors $p(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$, soit survie avec saturation.
- Si $1 < p_0$ alors $p(t) \to 1$ quand $t \to +\infty$, soit survie avec saturation.

•
•

3.6 Exercices

Exercice 30 (Explosion en temps fini)**.** La solution d'un problème de Cauchy n'est pas toujours défini pour tous les temps : elle peut exploser en temps fini. Ainsi, résolvez

$$y'(t) = (y(t))^2,$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$.

Exercice 31 (Modèles de pêche)**.** On considère deux modèles de pêche pour une population de poissons, mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$. On suppose que la population initiale est $n(0) = 0,2$.

1. Pêche tenant compte de la population :

$$n'(t) = n(t)(1 - n(t)) - 0,1\, n(t).$$

   Expliquer l'équation. Quels sont les équilibres ? En remarquant que

$$n'(t) = n(t)(0,9 - n(t)),$$

   déterminer le comportement de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.

2. Pêche avec quota :

$$n'(t) = n(t)(1 - n(t)) - 0,1.$$

Expliquer l'équation. Montrer que les équilibres sont $\alpha \approx 0,11$ et $1-\alpha \approx 0,89$. On pose $p(t) = n(t) - \alpha$. Montrer que

$$\begin{cases} p(0) = 0,2 - \alpha \approx 0,09 \\ p'(t) = p(t)(1 - 2\alpha - p(t)). \end{cases}$$

En déduire le comportement de $p(t)$ puis celui de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 32 (Compétition périodique)**.** On considère une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) soumise où la compétition intra spécifique qui varie avec le temps :

$$n'(t) = n(t)[1 - (2 + \cos t)n(t)].$$

On suppose que la population initiale est $n(0) = 1/2$. Dans le modèle logistique "standard" (obtenu "en enlevant $\cos t$") on a alors $n(t) = 1/2$ pour tous les temps. Ici la situation va être différente...

1. Tracer le graphe de $t \mapsto 2 + \cos t$. Expliquer l'équation.
2. On pose $p(t) = \frac{1}{n(t)}$. Montrer qu'on a l'équation différentielle

$$p'(t) = -p(t) + 2 + \cos t.$$

   Quel est l'avantage de cette EDO par rapport à celle vérifiée par $n(t)$? La résoudre (vérifier que $t \mapsto 2 + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ est une solution particulière).
3. En déduire $n(t)$. Que se passe t il quand $t \to +\infty$.

Exercice 33 (Tracer f, ça aide !)**.** Discuter du comportement en temps grand de la solution de

$$\begin{cases} n'(t) = f(n(t)) \\ 0 < n(0) < 1 \text{ donné.} \end{cases}$$

dans le cas où $f(x) = x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$ puis dans le cas où $f(x) = x(x - \frac{1}{3})(x - \frac{2}{3})(x - 1)$.

Exercice 34 (Compétition "puissance")**.** On considère une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) décrite par l'équation

$$n'(t) = n(t)(1 - (n(t))^\alpha).$$

On suppose que $0 < n(0) < 1$.

1. Montrer que $0 < n(t) < 1$ pour tous les temps $t \geq 0$.
2. Quel est le comportement de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.
3. Quel modèle retrouve t on pour $\alpha = 1$? et pour $\alpha \to +\infty$?

Exercice 35 (Compétition Gompertz)**.** On considère le modèle de croissance de Gompertz :

$$n'(t) = -n(t)\ln(n(t)).$$

Quels sont les équilibres ? On pose $p(t) = \ln(n(t))$. Déterminer l'EDO vérifiée par $p(t)$. La résoudre. En déduire $n(t)$. Quel est le comportement de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.

Exercice 36 (Examen 2014-2015)**.**

1. Résoudre le problème linéaire

$$\begin{cases} z'(t) = z(t) - 1 \\ z(0) = 10. \end{cases}$$

2. On considère une population $n(t)$ suivant le problème non linéaire

$$\begin{cases} n'(t) = 2n(t) - 2\sqrt{n(t)} \\ n(0) = 100. \end{cases}$$

   En faisant un changement de fonction inconnue "$z(t) =$ une fonction de $n(t)$", ramener vous à la question précédente et calculer $n(t)$. Quel est le devenir de cette population ?

3. Remarquons que l'équation précédente s'écrit

$$n'(t) = f(n(t)),$$

   où la fonction f est donnée par $f(x) = 2(x - \sqrt{x})$ pour $x \geq 0$. Tracer la courbe de f en faisant apparaître ses deux zéros. Expliquer alors pourquoi certaines conditions initiales $n(0)$ conduisent à l'extinction.