Contrôle continu 2

Il faut que vos programmes soient **exécutables** par la commande `python3 nomdufichier.py` et qu'ils **affichent leurs résultats**. Notamment, il ne sera pas accepté que les résultats ne soient accessibles que par le débogueur de votre environnement de développement.

Exercice 1. Equations differentielles ordinaires

On considère le problème de Cauchy

$$\dot{x}(t) = \sin(t)\, x(t) + \cos(t)\,, \qquad x(0) = 1\,.$$

1. Calculez la solution $x(t)$ aux points $t \in \{0.1,\, 0.2,\, 0.3,\, \ldots,\, 1\}$, en utilisant une des méthodes du cours pour la solution des EDO. La précision numérique sera $\leq 10^{-14}$.
2. La solution peut s'écrire

$$x(t) = e^{1-\cos(t)} + e^{-\cos(t)} \int_0^t e^{\cos(s)} \cos(s)\; \mathrm{d}s\,.$$

Calculez de nouveau $x(t)$ en utilisant une méthode du cours appropriée pour le calcul des intégrales. La précision numérique sera encore $\leq 10^{-14}$. Comparez les valeurs à $t \in \{0.1,\, 0.2,\, 0.3,\, \ldots,\, 1\}$ avec votre premier résultat, afin de vérifier qu'ils s'accordent dans les limites de la précision numérique.

Exercice 2. Equation de Laplace

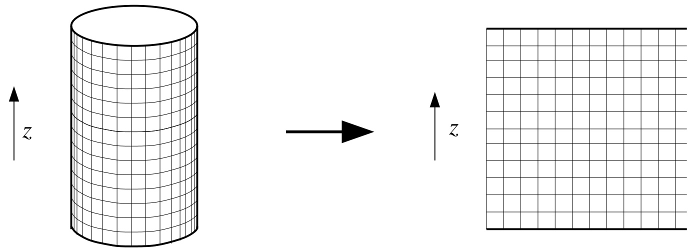
Trouvez la solution de l'équation de Laplace $\Delta\Phi = 0$ sur la surface d'un cylindre de rayon $\rho = 1/\pi$, paramétrée par un angle $\varphi \in [0,\, 2\pi[$ et par la coordonnée $z \in [0,\, 2]$. On rappelle que le laplacien dans ces coordonnées prend la forme

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\,.$$

Les conditions aux limites sont

$$\Phi(z = 0, \varphi) = \sin\varphi\,, \qquad \Phi(z = 2, \varphi) = \cos\varphi\,.$$

Il convient de représenter le domaine de solution par un rectangle $[0,\, 2] \times [0,\, 2\pi[$. On choisira un maillage régulier de 100×100 cellules, soit 101×100 points, et une précision numérique de 10^{-5} pour la solution de l'équation discrétisée. Utilisez une méthode appropriée et efficace. Tracez votre résultat en fonction de z et de φ (courbes de niveau ou heatmap).



Indication : Pour rappel, le dernier élément d'un tableau est accédé avec l'indice `-1`, ce qui peut s'avérer pratique pour réaliser l'identification $(\varphi = 0) \sim (\varphi = 2\pi)$.