HMPH104 Modélisation et simulation en physique, Faculté des Sciences des Montpellier, 2020 (F. Brümmer)
01/12/2020, durée 90 min. Documents du cours autorisés.

Contrôle continu 2

Il faut que vos programmes soient **exécutables** par la commande `python3 nomdufichier.py` et qu'ils **affichent leurs résultats**. Notamment, il n'est pas acceptable si les résultats ne sont accessibles que par le débogueur de votre environnement de développement.

Exercice 1. Quadrature de Gauss-Tchebychev

Une variante de la *méthode de Gauss-Tchebychev* s'utilise pour le calcul numérique des intégrales de la forme

$$I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x)\, \mathrm{d}x \approx \sum_{k=1}^{N} w_k f(x_k)$$

avec une fonction f qui est bien approximée par un polynôme. Les nœuds et poids sont

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{N+1}\,, \qquad w_k = \frac{\pi}{N+1}\sin^2\frac{k\pi}{N+1} \qquad (k = 1, \ldots, N)\,.$$

Réalisez un programme qui utilise cette méthode pour calculer l'intégrale

$$I(\sigma) = \frac{1}{\sigma}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

avec $N = 30$ nœuds. Tracez $I(\sigma)$ entre $\sigma = 0.1$ et $\sigma = 2$. Votre programme évitera des calculs redondants dans la mesure du possible.

Exercice 2. Équations différentielles partielles

On considère l'équation de la chaleur en une dimension spatiale

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} - D\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 0$$

pour $D = 5 \times 10^{-2}$, $x \in [0,\, 1]$, $t \in [0,\, 10]$. Les conditions aux limites et la condition initiale sont

$$\phi(t, x=0) = t^2\,, \qquad \phi(t, x=1) = 0\,, \qquad \phi(t=0, x) = 0\,.$$

1. Résolvez ce problème de Cauchy avec la méthode FTCS en divisant l'espace en $N = 100$ intervalles et pour un incrément en temps de $h = 10^{-3}$. Tracez la solution en fonction de x à $t = 10$.
2. La *méthode de Dufort-Frankel* est une méthode explicite de différences finies qui est plus stable que la méthode FTCS. Pour l'appliquer à l'équation de la chaleur :
   — Pour une discrétisation de x en $N+1$ points x_n, définir comme d'habitude $\phi_n(t) = \phi(t, x_n)$ et $a = x_{n+1} - x_n$. Choisir un incrément en temps h.
   — Avec les $\phi_n(0)$ donnés par la condition initiale, calculer dans un premier temps les $\phi_n(h)$ avec la méthode FTCS.
   — Avec les $\phi_n(t)$ et les $\phi_n(t+h)$ connus (initialement pour $t = 0$), poser
   $$\phi_n(t+2h) = \phi_n(t) + \frac{2hD}{a^2}\Big(\phi_{n-1}(t+h) + \phi_{n+1}(t+h) - \big(\phi_n(t+2h) + \phi_n(t)\big)\Big) \qquad (\star)$$
   ce qui donne les $\phi_n(t+2h)$. Itérer avec $t \leftarrow t+h$.

   Résolvez de nouveau le problème de Cauchy ci-dessus avec la méthode de Dufort-Frankel en utilisant la même discrétisation qu'avant. Tracez la solution en fonction de x à $t = 10$.
   Indication : Il convient de d'abord résoudre l'équation $(\star)$ en $\phi_n(t+2h)$ sur papier, afin d'obtenir une expression explicite pour $\phi_n(t+2h)$ en fonction des quantités connues.
3. Essayez de faire tourner les deux méthodes avec $h = 10^{-2}$ plutôt que $h = 10^{-3}$. Par un commentaire dans votre fichier de code, expliquez brièvement ce qui se passe.