Probabilités: Loi binomiale - Echantillonnage

I) Epreuve de Bernoulli - Loi binomiale

a) Epreuve de Bernoulli

Exercice 1

1) On lance deux fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée. Les deux lancers sont indépendants.

Soient P l'évènement "on obtient pile" et F l'évènement "on obtient face".

a) Etablir l'arbre des probabilités.

b) Etablir la loi de probabilité.

2) Un pièce n'est plus équilibrée. En effectuant un grand nombre de lancers, on a remarqué que "Face" est obtenu dans 40% des cas. On admet donc qu'à chaque lancer, on a:

$$p(F) = \frac{2}{5} et\, p(P) = \frac{3}{5}$$

On lance deux fois cette pièce de monnaie, les lancers étant indépendants.
On associe la variable aléatoire X qui a chaque éventualité fait correspondre le nombre de fois que l'on a obtenu "Face".
Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X.

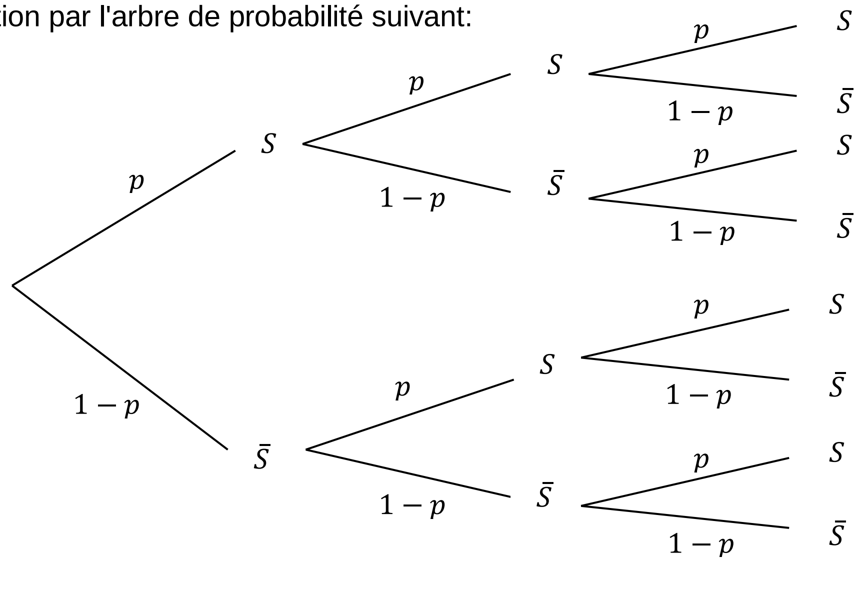
Exercice 2

Toujours avec une pièce de monnaie dont on ne sait pas si elle est équilibrée.
On suppose que la probabilité d'obtenir "Face" est un nombre réel p de l'intervalle [0;1].
1) Quel est la probabilité d'obtenir "Pile"?
2) On lance deux fois cette pièce de monnaie. Les deux lancers sont indépendants.
a) Représenter la situation par un arbre pondéré.
b) On associe la variable aléatoire X qui a chaque éventualité fait correspondre le nombre de fois que l'on a obtenu "Face".
Donner la loi de probabilité de X et calculer l'espérance mathématique de X.

Définition 1:

Une épreuve de Bernoulli correspond à une expérience ayant deux éventualités possibles, le "succès" $\boldsymbol{S}$ et "l'échec" $\boldsymbol{\bar{S}}$.

Notons $p(S) = p\; et\; p(\bar{s}\,) = 1 - p$
Répétons trois fois une épreuve de Bernoulli, de manière indépendante.
On s'intéresse au nombre de succès que l'on obtient sur les trois essais. On peut traduire la situation par l'arbre de probabilité suivant:



D'après l'arbre, la probabilité d'obtenir $(S,S,\bar{S})$ est $p \times p \times (1-p) = p^2(1-p)$
De même la probabilité d'obtenir $(\bar{S},S,S)$ est $p^2(1-p)$
et la probabilité d'obtenir $(S,\bar{S},S)$ est aussi $p^2(1-p)$
Ainsi la probabilité d'obtenir exactement deux succès correspond à la probabilité de l'évènement$\{(S,S,\bar{S});(\bar{S},S,S);(S,\bar{S},S)\}$, elle est égale à $3 \times p^2(1-p)$.
Soit X la variable aléatoire associée au nombre de succès .La loi de probabilité associée est renseignée dans le tableau ci-dessous:

Nombre de succés x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$(1-p)^3$	$3p(1-p)^2$	$3p^2(1-p)$	p^3

b) Schéma de Bernoulli

Définition 2:

En répétant $n\ fois$, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli, on réalise **un schéma de Bernoulli.**
Si X est la variable aléatoire correspondant au nombre de succès à l'issue du schéma de Bernoulli, on appelle **loi binomiale, la loi de probabilité de la variable aléatoire X de paramètre $n\ et\ p$.**
n étant le nombre de répétition
p étant la probabilité du succés.

Exercice 3

73% d'une population déterminée, possède un ordinateur.
Lorsqu'on interroge une personne dans cette population on note :
O l'évènement: "la personne possède un ordinateur"
$\bar{O}$ l'évènement:" la personne ne possède pas d'ordinateur".
1) Quelle est la probabilité de $\bar{O}$?
2) On interroge successivement au hasard et de manière indépendante trois personnes dans cette population.
a) Réaliser l'arbre des probabilités.
b) Quelle est la probabilité que les trois personnes interrogées aient un ordinateur?
c) Qu'elle est la probabilité qu'aucune des trois personnes interrogées ait un ordinateur?
d) Qu'elle est la probabilité qu'une exactement des trois personnes interrogées ait un ordinateur?

Exercice 4.1

La société qui imprime des tickets pour un jeu de grattage a reçu la consigne d'imprimer 5% de tickets gagnants. Ces tickets gagnants sont soigneusement mélangés avec les autres tickets qui eux sont perdants.
Lorsqu'une personne achète un ticket, on note:
G l'évènement :"le ticket est gagnant"
P l'évènement :"le ticket est perdant".
Une personne achète trois tickets.
1) Réaliser l'arbre des probabilités.
2) Quelle est la probabilité que les trois tickets sont gagnants?
3) Justifier que la probabilité qu'un seul des trois tickets soit gagnant est 0,135375.
4) On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de tickets gagnants obtenus.
a) Donner la loi de probabilité de X
b) Calculer l'espérance mathématique de X

c)Coefficient binomial et loi binomiale

Définition 3:

On répète $\boldsymbol{n}$ fois, de manière indépendante, une épreuve de Bernoulli et on considère l'arbre correspondant à cette répétition.
Soit $\boldsymbol{k}$ le nombre de succès.
Le nombre de chemins de l'arbre réalisant $\boldsymbol{k}$ succès se calcule grâce au **coefficient binomial** noté: $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$

Exercice 4.2
Déterminer à la calculatrice les coefficients binomiaux de l'exercice 3

Exercice 5
Reprendre l'exercice 4.1, avec 4 tickets. Vous aurez auparavant déterminer à la calculatrice les coefficients binomiaux.

Exercice 6(pour comprendre le coefficient binomial)
Nous avons trois boîtes identifiées par les lettres A, B, C.
Nous disposons de 6 boules numérotées de 1 à 6.
Chaque boîte peut contenir une boule.
1) Combien de possibilités avons nous de disposer les boules dans les trois boîtes?
2) Pour 3 chiffres obtenus, combien de permutations différentes avons nous?
3) Si on ne tient pas compte de l'ordre des chiffres obtenus, (on considère que {2,3,4} est identique à {3,2,4}), déduire alors le nombre de combinaisons possibles.

Vous venez de calculer $\binom{\boldsymbol{6}}{\boldsymbol{3}}$**...**

De manière générale, nous avons:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})! \times \boldsymbol{k}!}$$

avec $\boldsymbol{n}! = \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}) \times \dots\dots..\times (\boldsymbol{n}-\boldsymbol{p}) \times \dots\dots\dots \times \boldsymbol{2} \times \boldsymbol{1}$

Propriété

Dans un schéma de Bernoulli comportant n répétitions, si p est la probabilité du succès de l'épreuve de Bernoulli, alors la probabilité d'obtenir k succès est:

$$\boldsymbol{P(X=k) = \binom{n}{k} p^{k}(1-p)^{n-k}}$$

La loi binomiale de paramètre $\boldsymbol{n}$ $\boldsymbol{et}$ $\boldsymbol{p}$ se note $\boldsymbol{B(n;p)}$.

Exercice 7
Une pièce de monnaie n'est pas équilibrée et la probabilité d'obtenir "Pile" est égale à 0,6.
On jette 10 fois cette pièce.
Quelle est la probabilité d'obtenir 7 fois "Pile".

Exercice 8
Dans un schéma de Bernoulli comportant 9 répétitions, la probabilité du succès est de 0,65.
On appelle X le nombre de succès obtenus.
Déterminer $p(X=0)$; $p(X=3)$; $p(X=8)$; $p(X \leq 2)$.

Probabilités: Loi binomiale - Echantillonnage

Exercice 9

On jette 10 fois de suite une pièce dont la probabilité d'obtenir "Pile" est de 0,63.
On appelle X le nombre de "Pile" obtenus.
1) Etablir la loi de probabilité de X dans le tableau ci-dessous à $10^{-5}\ près$

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(X = x_i)$											

2) Représenter cette loi de probabilité par un diagramme en bâton.
3)Calculer l'espérance mathématique à 10^{-2} près.

Propriété

On considère la loi binomiale $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$ de paramètres $\boldsymbol{n\ et\ p}$.

Son espérance mathématique est $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}$

Sa variance est $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{p})$

Son écart type est $\boldsymbol{\sigma} = \sqrt{\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p} \times (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{p})}$

Exercice 10

Un QCM est composé de 8 questions indépendantes.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule de ces quatre réponses est juste.
Un candidat répond au hasard aux 8 réponses de ce QCM.
On appelle N le nombre de réponse juste qu'il obtient.
1) Montrer que la loi de probabilité de N est une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2) Donner la loi de probabilité de N. (valeurs arrondies à 10^{-6} près).
3) Représenter cette loi de probabilité par un diagramme en bâtons.
4) Calculer l'espérance mathématique de N.
5) Comment doit-on noter ce QCM pour qu'un candidat qui répond au hasard ait en moyenne 0.

II) Echantillonnage

Propriété:

On considère un caractère ayant une proportion $\boldsymbol{p}$ dans une population donnée.(p est une fréquence).
On considère des échantillons de taille $\boldsymbol{n}$.
Si $0,2 \leq p \leq 0,8$ $et\ si$ $n \geq 25$ alors 95% au moins des échantillons sont telles que la fréquence du caractère dans l'échantillon appartient à l'intervalle:

$$[\boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}} ; \boldsymbol{p} + \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation** au seuil de 95%.

Remarque, plus la taille de l'échantillon est grande et plus la fréquence observée dans l'échantillon est proche de la fréquence existant dans la population.

Exercice 11

D'après l'Insee, la proportion de femmes dans la population française est d'environ 51,6%.

Partie 1
1) Déterminer l'intervalle de fluctuation pour les échantillons de taille 100, de taille,1000 et de taille 10000. Interpréter.
2) On s'intéresse à des échantillons de 10000 personnes atteintes d'une maladie M. On trouve que pour 80% des échantillons, la proportion de femmes est dans l'intervalle $[0{,}506; 0{,}526]$. La proportion de femmes malades de M est elle la même dans la population?

Partie 2
Un observateur se place à la sortie d'une gare et note le sexe des personnes qui passent.
On admettra que la proportion de femmes dans la population qui sort de la gare est identique à la proportion de femme dans la population française.
On peut assimiler le passage des personnes à un schéma de Bernoulli.
1) Déterminer la probabilité que les quatre premières personnes qui sortent soient toutes des hommes.
2) Déterminer la probabilité que, sur les dix premières personnes qui sortent, il y ait exactement cinq femmes.
3a) Compléter, en utilisant une calculatrice, le tableau suivant correspondant à la loi de probabilité du nombre N de femmes parmi les dix premières personnes qui sortent. (à $10^{-4} près$).

n_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(N = n_i)$											

b) Justifier que $p(N \in [2; 8]) \geq 95\%$.