Solutions TD 4 : Fonctions à plusieurs variables

Exercice 1.
a) Le domaine de définition est $\mathbb{R}^2$

b) $f(1,2) = 2 - 1^2 = 1$.

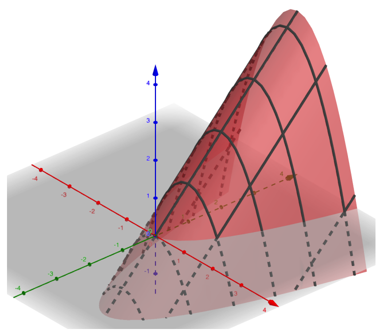
c) $S_f \cap \{z = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 0 = y - x^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}$. De même,

$$S_f \cap \{z = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2 + 1\} \text{ et } S_f \cap \{z = 2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2 + 2\}.$$

Les courbes de niveau sont de paraboles.

d) $S_f \cap \{x = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | z = y\}$. Une droite passant par l'origine avec une pente de 45 degré.

e)



Exercice 2.
a) $f(x, y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 3$.
Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + 2y + 2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre le système : $x + 2y + 2 = 0,\ \ 2x + 2y = 0$. Nous trouvons la solution $x = -1$ et $y = 1$.
D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1,1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-1,1)\right)^2 = 4 \cdot 2 - 4 = 2 > 0$$

Le point critique $(-1,1)$ est soit un maximum ou un minimum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = 4 > 0$ nous avons un minimum en $f(-1,1)$.

b) $f(x,y) = -5x^2 + 4xy - y^2 + 16x + 10$.
Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -10x + 4y + 16 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4x - 2y$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre le système : $-10x + 4y + 16 = 0, \quad 4x - 2y = 0$. Nous trouvons la solution $x = 8$ et $y = 16$.
D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -10, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,16)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(8,16) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(8,16)\right)^2 = (-10)\cdot(-2) - 4^2 = 4 > 0$$

Le point critique $(8,16)$ est soit un maximum ou un minimum. Comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(8,16) = -10 < 0$ nous avons un maximum en $f(8,16)$.

c) $f(x,y) = x^2 - y^2 + 4x - 4y - 8$.
Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x + 4 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 4$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre le système : $2x + 4 = 0, \quad -2y - 4 = 0$. Nous trouvons la solution $x = -2$ et $y = -2$.
D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,-2)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-2,-2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-2,-2)\right)^2 = (2)\cdot(-2) - 0^2 - 4 < 0$$

Nous avons un point selle en $f(-2,-2)$.

d) $f(x,y) = xe^{-x^2-y^2}$.
Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} + x(-2x)e^{-x^2-y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -x(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre le système : $(1 - 2x^2)e^{-x^2-y^2} = 0, \quad -2xye^{-x^2-y^2} = 0$. Comme $e^t > 0$ pour tout t alors, d'après la première équation on obtient $1-2x = -0$ et donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ et de la deuxième équation on en déduit que $y = 0$.

D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4xe^{-x^2-y^2} + (1-2x^2)(-2x)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-x^2-y^2} - 2xy(-2y)e^{-x^2-y^2}$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2ye^{-x^2-y^2} - 2xy(-2x)e^{-x^2-y^2}$$

On obtient,

En $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

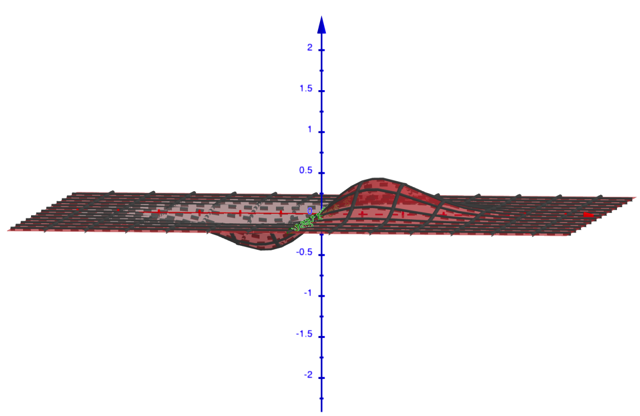
$$\varDelta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\right)^2 = (-2\sqrt{2}e^{-1/2})(-\sqrt{2}e^{-1/2}) - 0^2 = 4e^{-1} > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\sqrt{2}, 0) = -2\sqrt{2}e^{-1/2} < 0$ nous avons un maximum local en $f(\sqrt{2}, 0)$.

En $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$$\varDelta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\right)^2 = (2\sqrt{2}e^{-1/2})(\sqrt{2}e^{-1/2}) - 0^2 = 4e^{-1} > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-\sqrt{2}, 0) = 2\sqrt{2}e^{-1/2} > 0$ nous avons un minimum local en $f(-\sqrt{2}, 0)$.



e) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/3} + 1$.

Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{(x^2+y^2)^{2/3}} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{y}{(x^2+y^2)^{2/3}}$$

Ces fonctions sont définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$. De plus, sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ ces deux fonctions sont non nulles, donc le seul point critique se trouve en $(0,0)$. Donc si f admet un extremum local celui-ci se trouve en $(0,0)$.

Nous avons $f(0,0) = 1 \leqslant 1 + (x^2+y^2)^{1/3} = f(x,y)$ car $(x^2+y^2)^{1/3} \geq 0$. On en déduit que $f(0,0) = 1$ est un minimum local (même global) de f

f) $f(x,y) = x^2 + y^4$.

Tout d'abord calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre le système : $2x = 0, \;\; 4y^3 = 0$. Nous trouvons la solution $x = 0$ et $y = 0$.

D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \;\; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$$

On obtient,

$$\varDelta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 = (2) \cdot (0) - 0^2 = 0$$

Nous ne pouvons pas conclure avec le critère habituelle. Cependant, nous avons $f(0,0) = 0 \leqslant x^2 + y^4 = f(x,y)$ pour tout x, y. donc $f(0,0)$ est un minimum global.

Exercice 3.

(i) $f(x,y) = 3e^{-x^2-y^2}$

Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -6xe^{-x^2-y^2} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = -6ye^{-x^2-y^2}$$

Nous avons un point critique en $(0,0)$. D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6e^{-x^2-y^2} + (-6x)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6xe^{-x^2-y^2} - 6y(-2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -12xye^{-x^2-y^2}$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 = (-6)(-6) - 0^2 = 36 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6 < 0$ nous avons un maximum local en $f(0,0)$. La figure (b) représente cette situation.

(ii) $f(x,y) = x + y + 2xy - x^2 - y^2$
Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 1 + 2y - 2x \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 1 + 2x - 2y$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous avons le système : $1 + 2y - 2x = 0, \quad 1 + 2x - 2y = 0$. En additionnant ces deux égalités, on obtient que $2 = 0$ ce qui est une contradiction. Donc, on en déduit que ce système n'admet pas de solution. Alors, f ne possède pas de point critique (pas d'extremum). La figure (c) représente cette situation.

(iii) $f(x,y) = 4e^{xy}$
Nous avons

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4ye^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = 4xe^{xy}$$

Nous avons un point critique en $(0,0)$. D'autre part,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4y^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4x^2e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4e^{xy} + 4yxe^{xy}$$

On obtient,

$$\Delta = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)\right)^2 = (0)(0) - 4^2 = -16 < 0$$

Nous avons donc un point selle. La figure (a) représente cette situation.

Exercice 4.
$D(x,y) = x^2 + 2y^2 - 18x - 24y + 2xy + 120$
Il suffit de trouver les valeurs de x et y pour lesquelles la fonction D est minimale. Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial D}{\partial x} = 2x - 18 + 2y \text{ et } \frac{\partial D}{\partial y} = 4y - 24 + 2x$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2$. Nous devons donc résoudre le système : $2x - 18 + 2y = 0, \quad 4y - 24 + 2x = 0$. Nous trouvons la solution $x = 6$ et $y = 3$.
D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 D}{\partial x^2} = 2,\ \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} = 4 \text{ et } \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} = 2$$

On obtient,

$$\varDelta = \frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(6,3)\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}(6,3) - \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}(6,3)\right)^2 = (2)(2) - 2^2 = 4 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}(6,3) = 2 > 0$ nous avons un minimum local en $f(6,3)$.

Exercice 5. Notons par x, y et z la longueur, la largeur et l'hauteur de la boîte respectivement. Le volume est donné par $xyz = 32$ et donc $z = \frac{32}{xy}$. De plus, la surface est donnée par $S(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$. Nous sommes donc amenés à chercher le minimum de la fonction à deux variables

$$S(x,y) = xy + 2x\frac{32}{xy} + 2y\frac{32}{xy} = xy + \frac{64}{y} + \frac{64}{x}$$

Calculons les points critiques. Nous avons

$$\frac{\partial S}{\partial x} = y - \frac{64}{x^2} \text{ et } \frac{\partial S}{\partial y} = x - \frac{64}{y^2}$$

Ces fonctions sont bien définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. La situation quand $x = y = 0$ n'est pas envisageable car dans ce cas nous ne pouvons pas avoir un volume de $32m^3$. Nous devons donc résoudre le système : $x - \frac{64}{y^2} = 0, \quad y - \frac{64}{x^2} = 0$ lorsque $x, y \neq 0$. On peut réécrire le système comme $xy^2 = 64, \quad yx^2 = 64$ et donc on obtient $xy^2 - yx^2 = 0$ et, en divisant par xy, on a $y - x = 0$ et donc $y = x$, d'où, nous trouvons la solution $x = 4$ et $y = 4$ (et donc $z = 2$).

D'autre part , nous avons

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{128}{x^3},\ \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = \frac{128}{y^3} \text{ et } \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = 1$$

On obtient,

$$\varDelta = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(4,4)\frac{\partial^2 S}{\partial y^2}(4,4) - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y}(4,4)\right)^2 = (\frac{128}{4^3})(\frac{128}{4^3}) - 1^2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3 > 0$$

et comme $\frac{\partial^2 S}{\partial x^2}(4,4) = 2 > 0$ nous avons bien un minimum local en $f(4,4)$.

Conclusion : les dimensions $4 \times 4 \times 2$ donnent une surface minimale pour un volume de $32m^3$.

Exercice 6.

a) $w_1 = 2xydx + x^2dy$

On pose $F(x,y) = 2xy$ et $G(x,y) = x^2$. Nous avons que $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x = \frac{\partial G}{\partial x}$. En plus, w_1 est définie sur l'ouvert étoilé $\mathbb{R}^2$. Donc w_1 est bien exacte.

On cherche $f(x,y)$ tel que $df = w_1$. Ceci équivaut à résoudre le système :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \ \frac{\partial f}{\partial y} = x^2.$$

En intégrant la première équation par rapport à x on trouve $f(x,y) = yx^2 + c(y)$. En dérivant cette expression par rapport à y nous trouvons $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + c'(y)$. En identifiant cette équation avec la deuxième équation du système on a $x^2 + c'(y) = x^2$. Il s'ensuit que $c'(y) = 0$ et donc $c(y) = k, k \in \mathbb{R}$.

Par suite, la fonction f cherchée est $f(x,y) = x^2y + k$.

b) $w_2 = xydx - zdy + xzdz$

Rappel : la forme différentielle $w = Fdx + Gdy + Hdz$ est exacte si w est étoilée et $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x}$.

On pose $F = xy, G = -z$ et $H = xz$. On constante que $\frac{\partial F}{\partial y} = x \neq 0 = \frac{\partial G}{\partial x}$ donc w_2 n'est pas exacte.

c) $w_3 = 2xe^{x^2-y}dx - 2e^{x^2-y}dy$

On pose $F = xe^{x^2-y}$ et $G = -2e^{x^2-y}$. On constante que $\frac{\partial F}{\partial y} = -2xe^{x^2-y} \neq -4xe^{x^2-y} = \frac{\partial G}{\partial x}$ donc w_3 n'est pas exacte.

d) $w_4 = yz^2dx + (xz^2 + z)dy + (2xyz + 2z + y)dz$

On pose $F = yz^2, G = xz^2$ et $H = 2xyz+2z+y$. On a $\frac{\partial F}{\partial y} = z^2 = \frac{\partial G}{\partial x}, \frac{\partial G}{\partial z} = 2x+1 = \frac{\partial H}{\partial y}$ et $\frac{\partial F}{\partial z} = 2zy = \frac{\partial H}{\partial x}$. En plus w_4 est définie sur l'ouvert l'étoilé $\mathbb{R}^3$. Donc, w_4 est bien exacte.

Cherchons maintenaty f telle que $df = w_4$. Ceci équivaut à résoudre le système :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = yz^2, \ \frac{\partial f}{\partial y} = xz^2 + z, \ \frac{\partial f}{\partial z} = 2xyz + 2z + y$$

.

En intégrant la première équation par rapport à x on trouve $f = xyz^2 + \varphi(y,z)$. En dérivant cette expression par rapport à y et en égalisant avec la deuxième équation du système on a

$$xz^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xz^2 + z \text{ qui équivaut à } \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z$$

En dérivant $f = xyz^2+\varphi(y,z)$ par rapport à z et en égalisant avec la troisième équation du système on a

$$2xyz + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2xyz + 2z + y \text{ qui équivaut à } \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z + y$$

En intégrant $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = z$ par rapport à y il vient $\varphi(y,z) = zy + c(z)$. En dérivant cette expression par rapport à z on trouve $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = y + c'(z)$ et en utilisant que $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2z + y$ on trouve

$$y + c'(y) = 2z + y,$$

c'est-à-dire $c'(z) = 2z$. Donc, en intégrant cette expression par rapport à z on a $c(z) = z^2 + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Ainsi, la fonction f cherchée est

$$f(x,y,z) = xyz^2 + \varphi(y,z) = xyz^2 + zy + c(z) = xyz^2 + zy + z^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Exercice 7. $w = (x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy$.

(a) Nous avons $F = x^2 + y^2 + 2x$ et $G = 2y$. On a $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0 = \frac{\partial G}{\partial x}$. Donc w n'est pas exacte.

(b) On va trouver une fonction $\varphi(x)$ telle que $\varphi(x)w = df$. On remarque que w est définie sur $\mathbb{R}^2$ qui est étoilé. On voudrait que $\varphi(x)w$ soit exacte pour que f existe. Il faut donc que

$$\frac{\partial(\varphi(x)(x^2 + y^2 + 2x)}{\partial y} = \frac{\partial(\varphi(x)(2y)}{\partial x}$$

Ceci équivaut $2y\varphi(x) = 2y\varphi'(x)$ pour tout x. Autrement dit, $\varphi(x) = \varphi'(x)$, donc $\varphi(x) = ke^x$, k-constante (on verra comment on trouve cette solution plus tard dans le cours). On peut choisir n'importe quelle valeur réelle pour k, prenons $k = 1$.

Ainsi,

$$\varphi w = e^x(x^2 + y^2 + 2x)dx + e^x(2y)dy.$$

Cherchons ensuite f telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = e^x(2y)$$

En intégrant la deuxième égalité par rapport à y, on trouve

$$f(x,y) = e^x y^2 + c(x)$$

En dérivant cette expression par rapport à x on a $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x y^2 + c'(x)$ et en utilisant $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$ on trouve

$$e^x y^2 + c'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$$

c'est-à-dire, $c'(x) = e^x(x^2 + 2x)$. En intégrant cette expression par rapport à x, on a $c(x) = x^2 e^x + k$ avec $k \in \mathbb{R}$. Donc, $f(x,y) = e^x y^2 + x^2 e^x + k = e^x(y^2 + x^2) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$

Exercice 8. $w = \frac{-y}{x^2+y^2}dx + \frac{x}{x^2+y^2}dy$

a) w est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) On paramétre le cercle C par $x = \cos t, y = \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et donc $dx = -\sin t, dy = \cos t$. On obtient

$$\int_C w = \int_0^{2\pi} (-\sin t(-\sin t) + \cos t(\cos t)dt = \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

c) w n'est pas exacte, sinon son intégrale curviligne sur la courbe fermée C serait nulle et cela contredit (b). Remarquons cependant que

$$\frac{\partial(\frac{-y}{x^2+y^2})}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial(\frac{x}{x^2+y^2})}{\partial x}$$

Le domaine de définition $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0\}$ n'est pas étoilée (il y a un trou). En fait, $\int_C w$ n'est pas nulle car le cercle entoure le trou.

Exercice 9.

a) $w = \frac{x}{x^2+y^2}\, dx + \frac{y}{x^2+y^2}\, dy$ et C est l'arc de la parabole d'équation $y^2 = 2x + 1$ joignant les points $(0, -1)$ et $(0, 1)$ parcouru une fois dans le sens des y croissants.

On paramétre C par $y = t, x = \frac{t^2-1}{2}$ et donc $dy = dt$ et $dx = tdt$ avec t variant en croissant de -1 à 1. On obtient

$$\int_C w = \int_{-1}^{1} \left(\frac{\frac{t^2-1}{2}}{(\frac{t^2-1}{2})^2 + t^2} t + \frac{t}{(\frac{t^2-1}{2})^2 + t^2} \right) dt$$

On rappelle que si une fonction $f(x)$ est impaire (c'est-à-dire $f(-t) = -f(t)$) alors $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ (par la symmétrie centrale).

On pourra vérifier que $f(t) = \frac{\frac{t^2-1}{2}}{(\frac{t^2-1}{2})^2+t^2} t + \frac{t}{(\frac{t^2-1}{2})^2+t^2}$ est une fonction impaire et donc $\int_C w = 0$.

b) $w = (x - y^3)\, dx + x^3\, dy$ et C est le cercle de centre O et de rayon 1 parcouru une fois dans le sens direct.

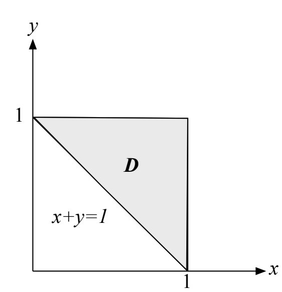
On paramétre le cercle C par $x = \cos t, y = \sin t$ avec $t \in [0, 2\pi]$ et donc $dx = -\sin t, dy = \cos t$. On obtient

$$\begin{aligned}
\int_C w &= \int_0^{2\pi}((\cos t - \sin^3 t)(-\sin t) + \cos^3 t(\cos t))dt \\
&= \int_0^{2\pi}(\cos^4 t + \sin^4 t - \cos t \sin t)dt \\
&= \int_0^{2\pi}((\cos^2 t + \sin^2 t)^2 - 2\cos^2 t \sin^2 t - \cos t \sin t)dt \\
&= \int_0^{2\pi}(1 - \tfrac{\sin^2(2t)}{2} - \tfrac{\sin(2t)}{2})dt \qquad \text{(en utilisant } \sin(2x) = 2\sin x \cos x) \\
&= \int_0^{2\pi}(1 - \tfrac{1}{4}(1-\cos(4t)) - \tfrac{\sin(2t)}{2})dt \qquad \text{(en utilisant } \sin^2 x = \tfrac{1-\cos(2x)}{2}) \\
&= \int_0^{2\pi} dt - \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2t)dt - \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi} dt + \tfrac{1}{4}\int_0^{2\pi}\cos(4t)dt \\
&= [t]_0^{2\pi} - \tfrac{1}{2}\left[-\tfrac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\tfrac{t}{4}\right]_0^{2\pi} + \tfrac{1}{4}\left[\tfrac{\sin(4t)}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= 2\pi - \tfrac{1}{2}(-\tfrac{1}{2} - (-\tfrac{1}{2})) - \tfrac{2\pi}{4} + \tfrac{1}{4}(0) \\
&= 2\pi - \tfrac{\pi}{2} \\
&= \tfrac{3\pi}{2}
\end{aligned}$$

c) $w = xyz\ dx$ et C est l'arc $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = \cos t \sin t$. On a $dx = -\sin t dt$ et t variant en croissant de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

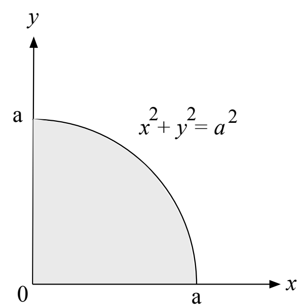
$$\begin{aligned}
\int_C w &= \int_0^{2\pi}(\cos t)(\sin t)(\cos t \sin t)(-\sin t\ dt) \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2 t(-\sin t)(\sin^2 t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2 t(-\sin t)(1-\cos^2 t)\ dt \\
&= \int_0^{2\pi}\cos^2 t(-\sin t) + \cos^4 t \sin t\ dt \\
&= \left[\tfrac{\cos^3 t}{3} - \tfrac{\cos^5 t}{5}\right]_0^{2\pi} \\
&= -\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} \\
&= -\tfrac{2}{15}
\end{aligned}$$

Exercice 10. Calculer les intégrales multiples suivantes :
a) $\int\int_D (x+y)\ dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leqslant 1, y \leqslant 1, x+y \geq 1\}$.
Le domaine d'intégration est donnée dans la figure ci-dessous



$$\begin{aligned}
\int\int_D (x+y)\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{1-x}^1 (x+y)dy\right) dx \\
&= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2}\right]_{1-x}^1 dx \\
&= \int_0^1 \left(x + \frac{1}{2} - x(1-x) - \frac{(1-x)^2}{2}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + x\right) dx \\
&= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

b) $\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy^2\ dy\ dx$. Le domaine d'intégration est donnée dans la figure ci-dessous



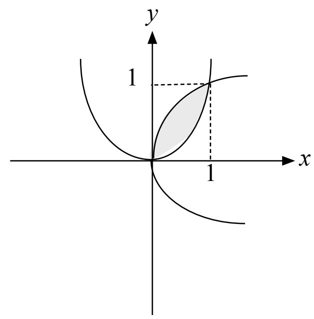
$$\begin{aligned}
\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy^2\ dy\ dx &= \int_0^a x \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dx \\
& \int_0^a x \frac{(\sqrt{a^2-x^2})^3}{3} \\
& \frac{1}{3} \int_0^a x(\sqrt{a^2-x^2})^{3/2}.
\end{aligned}$$

On pose $u = a^2 - x^2$ donc $du = -2xdx$ et donc $-\frac{du}{2} = 2dx$. Par ailleurs, pour $x = 0$ on a $u = a^2$ et pour $x = a$ on a $u = 0$. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} \int_0^a x(\sqrt{a^2-x^2})^{3/2} &= \frac{1}{3} \int_0^a u^{3/2}(-\frac{du}{2}) \\
&= -\frac{1}{6} \left[\frac{2}{5} u^{5/2}\right]_{a^2}^0 \\
&= -\frac{1}{6}(-\frac{2}{5}(a^2)^{5/2}) = \frac{1}{15} a^5.
\end{aligned}$$

c) $\int\int_D xy\ dx\ dy$ où D est la partie du plan limitée par les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $x = y^2$.

Le domaine d'intégration est donné dans la figure ci-dessous

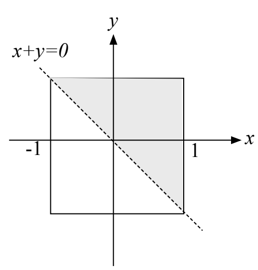


$$\begin{aligned}\int\int_D xy\ dxdy &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy\ dy\right) dx\\ &= \int_0^1 \left(\int_{x^2}^{\sqrt{x}} ydy\right) x\ dx\\ &= \int_0^1 x \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 - x^5\ dx\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^6}{6}\right]_0^1\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Exercice 11.

a) $\int\int_{[-1,1]^2} |x+y|\ dxdy$.

Si l'on pose pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $f(x, y) = |x+y|$ alors pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(-x, -y) = f(x, y)$ ou encore f prend les mêmes valuers en deux points symétrique par rapport à l'origine. Puisque l'origine est centre de symétrie $[-1, 1]^2$ on en déduit que



$$\begin{aligned}
\int\int_{[-1,1]^2} f(x,y)\ dxdy &= \int\int_{\substack{-1\leqslant x,y\leqslant 1\\ x+y\geq 0}} f(x,y)\ dxdy + \int\int_{\substack{-1\leqslant x,y\leqslant 1\\ x+y\leqslant 0}} f(x,y)\ dxdy\\
&= 2\int\int_{\substack{-1\leqslant x,y\leqslant 1\\ x+y\geq 0}} f(x,y)\ dxdy\\
&= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_{-x}^{1}(x+y)dy\right)dx\\
&= 2\int_{-1}^{1}\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_{-x}^{1}dx\\
&= 2\int_{-1}^{1}\left(x+\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^2}{2}\right)dx\\
&= 2\left[\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^3}{6}\right]_{-1}^{1}\\
&= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\\
&= 2\left(1+\frac{2}{3}-\frac{2}{6}\right)=2\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{3}
\end{aligned}$$

b) $\int\int_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdy.$

En passant en coordonnées polaires avec $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ et $r=x^2+y^2$. On rappelle que

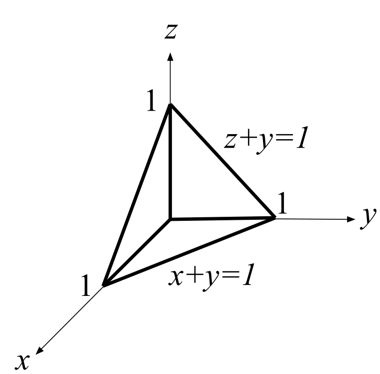
$$\int\int_A f(x,y)dA=\int\int_A f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\ dr\ d\theta$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\int\int_{x^2+y^2\leqslant 1}\frac{1}{1+x^2+y^2}\ dxdy &= \int\int_{\substack{0\leqslant r\leqslant 1\\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi}}\frac{r}{1+r^2}\ dr\ d\theta\\
&= \left(\int_0^1\frac{r}{1+r^2}\ dr\right)\int_0^{2\pi}d\theta \qquad \text{(intégrales indépendantes)}\\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(1+r^2)\right]_0^1\times 2\pi\\
&= \pi\ln 2.
\end{aligned}$$

c) $\int\int\int_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\ dxdydz.$

Le domaine d'intégration est donnée dans la figure ci-dessous



$$\begin{aligned}\int\int\int_{0\leqslant x\leqslant y\leqslant z\leqslant 1} xyz\ dxdydz &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \left(\int_y^1 z\ dz\right) y\ dy\right) x\ dx \\ &= \int_0^1 \left(\int_x^1 \tfrac{1}{2}(1-y^2)y\ dy\right) x\ dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_x^1 y - y^3\ dy\right) x\ dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left[\tfrac{y^2}{2} - \tfrac{y^4}{4}\right]_x^1 x\ dx \\ &= \tfrac{1}{2}\int_0^1 \left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^4}{4}\right) x\ dx \\ &= \tfrac{1}{8}\int_0^1 x^5 - 2x + x\ dx \\ &= \tfrac{1}{8}\left(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\right) = \tfrac{1}{48}\end{aligned}$$

Exercice 12.

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi\cos\theta \\ y = r\cos\varphi\sin\theta \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

Rappel : $dr = \frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz$ où

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r}dr + \frac{\partial x}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial x}{\partial \theta}d\theta$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r}dr + \frac{\partial y}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial y}{\partial \theta}d\theta$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r}dr + \frac{\partial z}{\partial \varphi}d\varphi + \frac{\partial z}{\partial \theta}d\theta$$

(a)

$$dx = \cos\varphi\cos\theta dr - r\sin\varphi\cos\theta d\varphi - r\sin\theta\cos\varphi d\theta$$
$$dy = \cos\varphi\sin\theta dr - r\sin\varphi\sin\theta d\varphi + r\cos\theta\cos\varphi d\theta$$
$$dz = \sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi$$

b)

$$xdx = r\cos^2\varphi\cos^2\theta dr - r^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\theta d\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\theta$$
$$ydy = r\cos^2\varphi\sin^2\theta dr - r^2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2\theta d\varphi + r^2\sin\theta\cos\theta\cos^2\varphi d\theta$$
$$zdz = r\sin^2\varphi dr + r^2\cos\varphi\sin\varphi d\varphi$$

En additionnant, on obtient $xdx + ydy + zdz = rdr$. On en déduit que

$$xdx + ydy + zdz = rdr = r\left(\frac{\partial r}{\partial x}dx + \frac{\partial r}{\partial y}dy + \frac{\partial r}{\partial z}dz\right)$$

Ainsi, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$, $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$ et $\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$.