Solutions TD 3 : Fonctions d'une variable réelle

Exercice 1.

a) C'est vrai. La fonction $f = x \mapsto \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^*$. pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on peut écrire $f(x) = 1/g(x)$ avec $g(x) : x \to x$ avec $g(x) \neq 0$. $f = 1/g$ est donc continue comme quotient de deux fonctions continues.

b) C'est vrai, si f et g sont continues en x_0 alors $f+g$ est aussi continue en x_0.

c) On va montrer que si f est continue en x_0 et g est discontinue en x_0 alors $f+g$ est discontinue en x_0. On montre la contraposée, c'est-à-dire, si $f+g$ est continue en x_0 alors f est discontinue en x_0 ou g est continue en x_0.

Si $f+g$ est continue en x_0, il y a deux possibilités.

1) f est discontinue en x_0, dans ce cas nous avons montré l'implication.

2) f est continue en x_0 et donc $-f$ est aussi continue en x_0 impliquant que $(f+g)-f$ est continue en x_0 (comme somme de fonctions continues) et donc g est continue en x_0 montrant l'implication.

d) C'est faux. Considérons les fonctions

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f et g sont discontinues en 0 mais $f+g=1$ est continue en 0.

e) C'est faux. Considérons la fonction

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leqslant 0 \\ x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

f est bien croissante mais f n'est pas continue en 0.

Exercice 2. h est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1,4\}$ car h est une fonction polynomiale. Puis

$$\lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} 2x-1 = 1 \text{ et } \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2 = 1$$

et $h(1) = 1$ donc $\lim_{x\to 1} h(x) = h(1)$ si et seulement si h est continue en 1.

Ensuite,

$$\lim_{x\to 4^-} h(x) = \lim_{x\to 4^-} x^2 = 16 \text{ et } \lim_{x\to 4^+} h(x) = \lim_{x\to 4^-} 8\sqrt{x} = 16$$

et $h(4) = 16$ donc $\lim_{x\to 4} h(x) = h(4)$ si et seulement si h est continue en 4.

Conclusion : h est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$.
Si $x > 0$ alors $\frac{x^2+2|x|}{x} = \frac{x^2+2x}{x} = x+2$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+2|x|}{x} = 2$.
Si $x < 0$ alors $\frac{x^2+2|x|}{x} = \frac{x^2-2x}{x} = x-2$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2+2|x|}{x} = -2$.
Comme la limite à gauch et différent à la limite à droite alors $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+2|x|}{x}$ n'existe pas.

b) Soit $x \in \mathbb{R}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ alors

$$\lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} = \lim_{x\to\pi} 1-\cos x = 2.$$

Exercice 4.
a) C'est faux. Si $f(x) = -\frac{1}{x}$ alors $f'(x) = \frac{1}{x^2} > 0$. $D_f = \mathbb{R}^*$ mais f n'est pas strictement croissante sur $\mathbb{R}^*$ puisque $-1 < 1$ et $f(-1) = 1 > -1 = f(1)$ (c'est vrai si f est définie sur un intervalle).

b) C'est faux. $f(x) = x^3$ est strictement croissante mais $f'(x) = 3x^2$ et donc $f'(0) = 0$.

Exercice 5. La fonction $g(x) : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et donc $f(x)$ est dérivable sur $[0, +1[$ et $ax^2 + bx + c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (et donc sur $]1, +\infty[$) étant une fonction polynomial.

Analysons f en $x = 1$. On sait que $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ et $g'(1) = 1/2$. Il suffit donc de déterminer a et b tels que f soit dérivable en $x = 1$, pour cela il faut et il suffit que f soit continue en $x = 1$ et que

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \tag{0.1}$$

f est continue en $x = 1$ si et seulement si

$$1 = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} ax^2 + bx + 1 = a + b + 1$$

Donc, f continue en 1 si est seulement si $a + b + 1 = 1$ ou encore $a = -b$.

Maintenant,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = g'(1) = 1/2$$

Soit $h(x) = ax^2 + bx + 1$ alors,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = h'(1) = 2a + b$$

D'après (0.1), nous avons $2a + b = 1/2$ et comme $a = -b$ on trouve $a = 1/2$ et $b = -1/2$.

Exercice 6.
a) $\int x^2 \cos x \; dx$
Prenons $u = x^2$ et $v' = \cos x$ et donc $u' = 2x$ et $v = \sin x$. Alors,

$$\int x^2 \cos x \; dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx$$

Le degré du polynôme a diminué d'un. On intégre cette nouvelle intégrale par parties avec $u = x$ et $v' = \sin x$ et donc $u' = 1$ et $v = -\cos x$. Alors

$$\int x \sin x dx = -x \cos x - \int (1)(-\cos x) = -x \cos x + \sin x$$

Alors,

$$\int x^2 \cos x \; dx = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C, \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

b) $\int e^{-ax} \cos x \; dx, \quad (a > 0)$
Prenons $u = e^{-ax}$ et $v' = \cos x$ et donc $u' = -ae^{-ax}$ et $v = \sin x$. Alors,

$$I = \int e^{-ax} \cos x \; dx = e^{-ax} \sin x + a \int e^{-ax} \sin x \; dx$$

On intégre cette nouvelle intégrale par parties avec $u = e^{-ax}$ et $v' = \sin x$ et donc $u' = -ae^{-ax}$ et $v = -\cos x$. Alors

$$\int e^{-ax} \sin x \, dx = -e^{-ax} \cos x - \int -ae^{-ax}(-\cos x) \, dx = -e^{-ax} \cos x - a \int e^{-ax} \cos x \, dx = -e^{-ax} \cos x - aI.$$

Nous obtenons

$$I = \int e^{-ax} \cos x \; dx = e^{-ax} \sin x + a(-e^{-ax} \cos x - aI) = e^{-ax} \sin x - ae^{-ax} \cos x - a^2 I$$

et donc

$$I + a^2 I = e^{-ax} \sin x - ae^{-ax} a \cos x$$

d'où

$$\int e^{-ax} \cos x \; dx = I = \frac{1}{1 + a^2} e^{-ax}(\sin x - a \cos x) + C, \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

c) $\int x^n \ln x \, dx$, $(n \neq -1)$

Dans ce cas le choix $u = x^n$ donne une intégrale plus compliquée. Le bon choix est $u = \ln x$ et $v' = x^n$ et donc $u' = \frac{1}{x}$ et $v = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int x^n \ln x \, dx &= \tfrac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \tfrac{1}{n+1} \int \tfrac{1}{x} x^{n+1} \, dx \\
&= \tfrac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \tfrac{1}{n+1} \int x^n \, dx \\
&= \tfrac{x^{n+1}}{n+1} \ln x - \tfrac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C \\
&= \tfrac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}((n+1)\ln x - 1) + C, \quad \text{avec } C \text{ constante}
\end{aligned}$$

Remarquons qu'avec $n = 0$ on obtient

$$\int \ln x \, dx = \tfrac{x}{1^2}(\ln x - 1) + C = x \ln x - x + C$$

d) $\int \ln^2 x \, dx$

Prenons $u = \ln^2 x$ et $v' = 1$ et donc $u' = \frac{2 \ln x}{x}$ et $v = x$. Alors,

$$\begin{aligned}
\int \ln^2 x \, dx &= x \ln^2 x - 2 \int \tfrac{\ln x}{x} x \, dx \\
&= x \ln^2 x - 2 \int \ln x \, dx \\
&= x \ln^2 x - 2(x \ln x - x) + C \\
&= x(\ln^2 x - 2 \ln x + 2) + C, \quad \text{avec } C \text{ constante}
\end{aligned}$$

e) $\int \sin^2 x \, dx$

Prenons $u = \sin x$ et $v' = \sin x$ et donc $u' = \cos x$ et $v = -\cos x$. Alors,

$$F(x) = -\cos x \sin x + \underbrace{\int \cos^2 x}_{G(X)} \, dx$$

avant de calculer $G(x)$ il faut la transformer, sans quoi l'intégration par parties n'abutirait à rien. On utilise la formule $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$G(x) = \int \cos^2 x \, dx = \int \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx = \int \frac{1}{2} \, dx + \frac{1}{2} \int \cos(2x) \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}$$

et donc

$$F(x) = -\cos x \sin x + \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + C$$

Sachant que $\sin x \cos x = \frac{\sin(2x)}{2}$, nous obtenons

$$\int \sin^2 x \, dx = -\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4} + C, \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

Remarque : On aurait pu choisir $u = \sin^2 x$ et $v' = 1$ au départ.

Exercice 7.
a) $\int (\cos x)^{1234} \sin x \; dx$
On fait le changement de variable $u = \cos x$ et donc $x = \arccos u$ et $du = -\sin x$. Alors,

$$\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx = \int u^{1234}(-du) = -\frac{1}{1235}u^{1235}+C = -\frac{1}{1235}\cos^{1235}+C \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

b) $\int \frac{1}{x \ln x} \; dx$
On fait le changement de variable $u = \ln x$ et donc $x = \exp u$ et $du = \frac{dx}{x}$. Alors,

$$\int \frac{1}{x \ln x} \; dx = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |\ln x| + C \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

c) $\int \frac{1}{3+e^{-x}} \; dx$
On fait le changement de variable $u = e^x$ et donc $x = \ln u$ et $du = e^x dx$ ou encore $dx = \frac{du}{e^x} = \frac{du}{u}$. Alors,

$$\int \frac{1}{3+e^{-x}} \; dx = \int \frac{1}{3+\frac{1}{u}} \cdot \frac{du}{u} = \int \frac{1}{3u+1} \; du = \frac{1}{3} \ln |3u+1|+C = \frac{1}{3} \ln |3e^x+1|+C \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

d) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \; dx$
On assume que $\int \frac{1}{1-u^2} du = \arcsin u$. Essayons donc d'écrire $4x - x^2$ sous la forme $1 - t^2$.

$$4x - x^2 = 4 - (x-2)^2 = 4(1 - (\frac{1}{2}x - 1)^2)$$

On fait donc le changement de variable $u = \frac{1}{2}x - 1$ et donc $du = \frac{1}{2}dx$. Alors,

$$\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \; dx = \int \frac{1}{\sqrt{4(1-u^2)}} \; 2du = \int \frac{1}{\sqrt{(1-u^2)}} \; du = \arcsin u + C$$

$$= \arcsin(\frac{1}{2}x + 1) + C \quad \text{avec } C \text{ constante}$$

Exercice 8. Soit D_h le domaine de définition de h. Alors

$$\begin{aligned}
x \in D_h &\iff \ln(\cos(x+\pi)) \neq 0 \text{ et} \cos(x+\pi) > 0 \\
&\iff \ln(-\cos(x)) \neq 0 \text{ et } -\cos(x) > 0 \quad (\text{car} \cos(x+\pi) = -\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}) \\
&\iff -\cos(x) \neq 1 \text{ et} \cos(x) < 0 \\
&\iff \cos(x) \neq 1 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, 2k\pi + \tfrac{\pi}{2} < x < 2k\pi + \tfrac{3\pi}{2} \\
&\iff \forall n \in \mathbb{Z}, x \neq (2n+1)\pi \text{ et } (2k + \tfrac{1}{2})\pi < x < (2k + \tfrac{3}{2})\pi \\
&\iff x \in \mathbb{R} \setminus \{(2n+1)\pi | n \in \mathbb{Z}\} \text{ et } x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}](2k + \tfrac{1}{2})\pi, (2k + \tfrac{3}{2})\pi[\\
&\iff x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left( ](2k + \tfrac{1}{2})\pi, (2k + \tfrac{3}{2})\pi[\cup](2k+1)\pi, (2k + \tfrac{3}{2})\pi[\right)
\end{aligned}$$

Exercice 9.
a) Nous avons que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ et donc

$$(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) = (1+x) - (1-x) = 2x.$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x})}{x} \cdot \frac{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})}{(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = 1.$$

b) Nous avons $(a-b)(a^2 + a + b^2) = a^3 - b^3$ donc

$$(\sqrt[3]{1+x^2})((\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2.$$

Alors,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{1+x^2})^2 + \sqrt[3]{1+x^2} + 1} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 10.
a) $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$
On prend $u = x$ et $v' = \sin x$ et donc $du = dx$, $v = -\cos x$. Alors,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx &= [uv]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} u'v = [-x\cos x]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \cos x dx \\ &= [-x\cos x]_0^{\pi/2} + [\sin x]_0^{\pi/2} = 0 - 0 + 1 - 0 = 1\end{aligned}$$

b) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$
On fait le changement de variable $u = e^x$ et donc $du = e^x dx$ et $x = \ln u$. La variable varie de $x = 0$ à $x = 1$ donc u varie de $u = e^0 = 1$ à $u = e$. Alors

$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx = \int_1^e \frac{u}{\sqrt{u+1}} \frac{du}{u} = \int_1^e \frac{du}{\sqrt{u+1}} = \left[2\sqrt{u+1}\right]_1^e = 2\sqrt{e+1} - 2\sqrt{2}$$

c) $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$
On fait le changement de variable $x = \tan t$ et donc $t = \arctan x$ et $dx = (1 + \tan^2 t)dt$. On sait que $1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$. La variable varie de $x = 0$ à $x = 1$ donc t varie de $u = \arctan 0 = 0$ à $u = \arctan 1 = \pi/4$. Alors

$$\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2}\ dx = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2 t)^2}(1+\tan^2 t)dt = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(1+\tan^2 t)}dt = \int_0^{\pi/4} \cos^2 t dt$$

$$= \frac{1}{2}\int 1+\cos 2t\ dt = \frac{1}{2}\left[t+\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}.$$

d) $\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+\frac{1}{x^2})\arctan x\ dx$

Notons $I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+\frac{1}{x^2})\arctan x\ dx$. On fait le changement de variable $u = \frac{1}{x}$ et donc $du = -\frac{1}{x^2}dx$, $x = \frac{1}{u}$ et donc $dx = -\frac{du}{u^2}dx$. La variable varie de $x = 1/2$ à $x = 2$ donc u varie de $u = 2$ à $u = 1/2$. Alors

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+\frac{1}{x^2})\arctan x\ dx = \int_{2}^{\frac{1}{2}}(1+u^2)\arctan(1/u)\ (-\frac{du}{u^2})$$

$$= -\int_{2}^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{u^2}+1)\arctan(1/u)\ du = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{u^2}+1)\arctan(1/u)\ du.$$

Maintenant, on sait que $\arctan u + \arctan(\frac{1}{u}) = \pi/2$, donc

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{u^2}+1)\arctan(1/u)\ du = \int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{u^2}+1)(\pi/2-\arctan(u))\ du$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{u^2}+1)\ du - \int_{\frac{1}{2}}^{2}(\frac{1}{u^2}+1)\arctan(u)\ du = \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{u}+u\right]_{1/2}^{2} - I = \frac{3\pi}{2} - I$$

et donc

$$I = \frac{3\pi}{4}$$