

**Feuille TD 3 : Fonctions d'une variable réelle****Exercice 1.** Vrai ou faux ?

- a) La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue.
- b) La somme de deux fonctions continues en un point est continue en ce point.
- c) La somme d'une fonction continue et d'une fonction discontinue en un point est discontinue en ce point.
- d) La somme de deux fonctions discontinues en un point est discontinue en ce point.
- e) Toute fonction croissante est continue.

**Exercice 2.** Étudier la continuité de la fonction définie par

$$h(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 1, \\ x^2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4, \\ 8\sqrt{x} & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

**Exercice 3.** Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2|x|}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ **Exercice 4.** Soit  $f$  une fonction dérivable. Vrai ou faux ?

- a) Si  $f' > 0$  alors  $f$  est strictement croissante.
- b) Si  $f$  est strictement croissante, alors  $f' > 0$ .

**Exercice 5.** Trouver des réels  $a$  et  $b$  de manière à ce que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}_+$  par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ ax^2 + bx + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

soit dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 6.** Calculer les primitives suivantes par parties.

- a)  $\int x^2 \cos x \, dx$
- b)  $\int e^{-ax} \cos x \, dx \quad (a > 0)$
- c)  $\int x^n \ln x \, dx, \quad (n \neq -1)$
- d)  $\int \ln^2 x \, dx$
- e)  $\int \sin^2 x \, dx$

**Exercice 7.** Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

- a)  $\int (\cos x)^{1234} \sin x \, dx$
- b)  $\int \frac{1}{x \ln x} \, dx$
- c)  $\int \frac{1}{3+e^{-x}} \, dx$
- d)  $\int \frac{1}{\sqrt{4x-x^2}} \, dx$

#### RÉVISION ET APPROFONDISSEMENT

**Exercice 8.** Expliciter le domaine de définition de la fonction :

$$h(x) = \frac{1}{\ln(\cos(x + \pi))}.$$

**Exercice 9.** Déterminer les limites suivantes : a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$       b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2}$ .

Pour a) on pourra utiliser l'identité remarquable suivante :  $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$  pour tous  $a$  et  $b$  réels et pour b)  $(a-b)(a^2 + a + b^2) = a^3 - b^3$  pour tous  $a$  et  $b$  réels.

**Exercice 10.** Calculer les intégrales suivantes :

- a)  $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$  (intégration par parties)
- b)  $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} \, dx$  (à l'aide d'un changement de variable simple)
- c)  $\int_0^1 \frac{1}{(1+x^2)^2} \, dx$  (changement de variable  $x = \tan t$ )
- d)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 (1 + \frac{1}{x^2}) \arctan x \, dx$  (changement de variable  $u = \frac{1}{x}$ )