

Feuille TD 2 : Nombres complexes

Exercice 1. Calculer

- a) $(2 + 3i)(5 - 2i) + 6i$
- b) $(1 - 3i)^3$
- c) $\frac{1+i}{1-i}$.

Exercice 2. Soit $Z = (1 + i)z + 1 - i$. Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.

Exercice 3. Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivants :

- a) $(3 - i)\bar{z} - 2 + 4i = 0$.
- b) $(1 + i)z + (3 - i)\bar{z} = 1 + 2i$.
- c) $z\bar{z} + 4(z - \bar{z}) = 5 + 16i$.

Exercice 4. Soient $z_1 = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$ et $z_2 = \sqrt{2}(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3)$. Calculer (

- a) $z_1 z_2$
- b) z_1/z_2
- c) $1/z_1$.

Exercice 5. Exprimer z sous sa forme polaire quand a)

- a) $z = 1 - i$
- b) $z = \sqrt{3} + i$
- c) $z = 2$.

Exercice 6. Exprimer $e^{-i\pi/3}$ et $3e^{i\pi/4}$ sous forme rectangulaire.

Exercice 7. Résoudre les équations suivants :

- a) $z^2 - 2z + 4 = 0$.
- b) $z^3 + 8 = 0$.

Exercice 8. Trouver les racines carrés de $4 - 3i$ et de $1 + 5i$ dans \mathbb{C} .

Exercice 9. Soit $z = 2 - 2i$.

- a) Mettre z sous la forme exponentielle.
- b) Trouver les racines cubiques de z (c'est-à-dire, un nombre complexe w tel que $w^3 = z$).

Donner les solutions sous forme trigonométrique.

- c) Est-il vrai que le nombre $-1 - i$ est l'une des racines cubiques de z ?

RÉVISION ET APPROFONDISSEMENT

Exercice 10. Exprimer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en termes de $\sin \theta$ et $\cos \theta$.

Exercice 11. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$

- a) $z + \bar{z} = 2\Re(z)$, $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$;
- b) $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ et $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$;

c) $(z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z)$ et $(z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z)$.

Exercice 12. Montrer que

- a) pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\bar{z} = |z|^2$ et que $|z| = 0 \iff z = 0$;
- b) pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|$.

Exercice 13. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ \frac{1+ix}{1-ix}, x \in \mathbb{R} \right\}$.