

**Feuille TD 2 : Nombres complexes****Exercice 1.** Calculer

- a)  $(2 + 3i)(5 - 2i) + 6i$
- b)  $(1 - 3i)^3$
- c)  $\frac{1+i}{1-i}$ .

**Exercice 2.** Soit  $Z = (1 + i)z + 1 - i$ . Déterminer et construire l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $Z$  soit imaginaire pur.

**Exercice 3.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivants :

- a)  $(3 - i)\bar{z} - 2 + 4i = 0$ .
- b)  $(1 + i)z + (3 - i)\bar{z} = 1 + 2i$ .
- c)  $z\bar{z} + 4(z - \bar{z}) = 5 + 16i$ .

**Exercice 4.** Soient  $z_1 = \sqrt{2}(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)$  et  $z_2 = \sqrt{2}(\cos 4\pi/3 + i \sin 4\pi/3)$ . Calculer (

- a)  $z_1 z_2$
- b)  $z_1 / z_2$
- c)  $1 / z_1$ .

**Exercice 5.** Exprimer  $z$  sous sa forme polaire quand a)  $z = 1 - i$

- b)  $z = \sqrt{3} + i$
- c)  $z = 2$ .

**Exercice 6.** Exprimer  $e^{-i\pi/3}$  et  $3e^{i\pi/4}$  sous forme rectangulaire.

**Exercice 7.** Résoudre les équations suivants :

- a)  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .
- b)  $z^3 + 8 = 0$ .

**Exercice 8.** Trouver les racines carrées de  $4 - 3i$  et de  $1 + 5i$  dans  $\mathbb{C}$ .

**Exercice 9.** Soit  $z = 2 - 2i$ .

- a) Mettre  $z$  sous la forme exponentielle.
- b) Trouver les racines cubiques de  $z$  (c'est-à-dire, un nombre complexe  $w$  tel que  $w^3 = z$ ). Donner les solutions sous forme trigonométrique.
- c) Est-il vrai que le nombre  $-1 - i$  est l'une des racines cubiques de  $z$  ?

**RÉVISION ET APPROFONDISSEMENT**

**Exercice 10.** Exprimer  $\cos 5\theta$  et  $\sin 5\theta$  en termes de  $\sin \theta$  et  $\cos \theta$ .

**Exercice 11.** Montrer que pour tout  $z \in \mathbb{C}$

- a)  $z + \bar{z} = 2\Re(z)$ ,  $z - \bar{z} = 2i\Im(z)$  ;
- b)  $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  et  $\Im(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  ;

c)  $(z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z)$  et  $(z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z)$ .

**Exercice 12.** Montrer que

a) pour tout  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z\bar{z} = |z|^2$  et que  $|z| = 0 \iff z = 0$  ;

b) pour tout  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

**Exercice 13.** Déterminer l'ensemble  $E = \left\{ \frac{1+ix}{1-ix}, x \in \mathbb{R} \right\}$ .