Université de Montpellier IAE Master 2 SIAD 2022-2023

ANALYSE FINANCIERE des RISQUES

Dynamique des taux d'intérêt

Pr. Alain FRANCOIS-HEUDE   alain.francois-heude@umontpellier.fr

UM ENT MOODLE   Cours : M2FIN SIAD   AFH

Dynamique des taux d'intérêt en univers discret et certain

Modèle avec un seul taux d'intérêt directeur

Soit une économie gouvernée par un seul taux d'intérêt, le taux à court terme (une période) qui connaît dans le temps une dynamique qui le fait converger vers un taux normal avec une vitesse d'ajustement, selon le processus :

$$\Delta r = a(b - r_{t-1})\Delta t \quad \text{avec } \Delta r = r_t - r_{t-1} \quad \text{et} \quad \Delta t \text{ représente le pas du temps}$$

Paramètres de l'application :

Libellés des variables	Var	Valeur test
Taux d'intérêt annuel initial	r_o	5,00%
Taux d'intérêt normal à long terme	b	6,00%
Coefficient d'ajustement (force de rappel)	a	0,2
Taux de coupon (pour Obligation *In fine*)	i	6,50%
Valeur Nominale des Obligations		1,00

Question : **Calculer la valeur de r_t selon r_o, a, b et t ?**

Modèle avec un taux directeur **Calcul du taux court en t**

en t=0, taux initial = r_0 et $\Delta r = a(b-r)\Delta_t \quad 0<a<1 \quad b, r_0>0 \quad \Delta_t=1$

$$r_1 = r_0 + a(b-r_0) = r_0(1-a)+ab$$

$$r_2 = r_1(1-a)+ab = \left[(1-a)r_0+ab\right](1-a)+ab$$

$$= r_0(1-a)^2 + ab\left[1+(1-a)\right]$$

$$r_3 = r_2(1-a)+ab = r_0(1-a)^3 + ab\left[1+(1-a)+(1-a)^2\right]$$

$$\ldots$$

$$r_k = r_0(1-a)^k + ab\left[\frac{(1-a)^k-1}{1-a-1}\right] = r_0(1-a)^k + b\left[1-(1-a)^k\right]$$

$$\boxed{r_k = b + (r_0-b)(1-a)^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} r_k = b$$

Pour le calcul du taux court, il est préférable de conserver la relation de type AR(1)

$$r_k = r_{k-1}(1-a)+ab$$

Modèle avec un taux directeur **Calcul du prix d'un Zéro Coupon en t**

En t=0, le prix du Zéro Coupon est fixé à la valeur Nominale

$$V_0(ZC_0) = 1$$

$$V_0(ZC_1) = \frac{1}{(1+r_0)} = \frac{V_0(ZC_0)}{(1+r_0)}$$

$$V_0(ZC_2) = \frac{1}{(1+r_0)(1+r_1)} = \frac{V_0(ZC_1)}{(1+r_1)}$$

$$\ldots$$

On pose la valeur nominale à 1

Mise en évidence d'une relation de récurrence

$$V_0(ZC_k) = \frac{1}{\prod_{j=0}^{j=k-1}(1+r_j)} = \frac{V_0(ZC_{k-1})}{(1+r_{k-1})}$$

Forme AR(1) très utile sous Excel

$$\lim_{k\to\infty} V_0(ZC_k) = 0$$

Fonction monotone décroissante

Modèle avec un taux directeur **Calcul du rendement d'un Zéro Coupon en t**

Mise en évidence de la relation entre taux spot (R_t) et taux forward (r_k)

$$\left(1+R_1\right)=(1+r_0)\Rightarrow R_1=r_0=(1+r_0)^{\frac{1}{1}}-1$$

$$\left(1+R_2\right)^2=(1+r_0)(1+r_1)\Rightarrow R_2=\left[(1+r_0)(1+r_1)\right]^{\frac{1}{2}}-1$$

$$R_3=\left[(1+r_0)(1+r_1)(1+r_2)\right]^{\frac{1}{3}}-1$$

$$\left(1+R_k\right)^k=\prod_{j=0}^{j=k-1}(1+r_j)\Leftrightarrow R_k=\left[\prod_{j=0}^{j=k-1}(1+r_j)\right]^{\frac{1}{k}}-1=\sqrt[k]{\prod_{j=0}^{j=k-1}(1+r_j)}-1$$

Mise en évidence de la relation entre taux spot (R_t) et prix du Zéro Coupon

$$V_0(ZC_k)=\frac{1}{\left(1+R_k\right)^k}\Rightarrow R_k=\left[\frac{1}{V_0(ZC_k)}\right]^{\frac{1}{k}}-1$$

Modèle avec un taux directeur **Prix d'une obligation à coupon i, IN FINE en t**

En t=0, le prix de l'obligation In Fine est fixé à la valeur Nominale

A chaque date t>0, le titre verse un coupon C = i * Valeur Nominale

Evaluation au pied de coupon (pas de prise en compte du coupon payé en t)

$$V_0(IF_0, i) = 1$$

$$V_0(IF_1, i) = \frac{i+1}{(1+R_1)} = i \cdot V_0(ZC_1) + 1 \cdot V_0(ZC_1)$$

$$V_0(IF_2, i) = \frac{i}{(1+R_1)} + \frac{i+1}{(1+R_2)^2} = i \cdot \left[V_0(ZC_1) + V_0(ZC_2)\right] + 1 \cdot V_0(ZC_2)$$

...

$$V_0(IF_k, i) = i \cdot \left[\sum_{j=1}^{j=k} V_0(ZC_j)\right] + 1 \cdot V_0(ZC_k)$$

Modèle avec un taux directeur **Prix d'une obligation à coupon i, IN FINE en t**

Expression du prix en t en fonction du prix de l'obligation In Fine en t-1

$$V_0(IF_1, i) = \frac{i+1}{(1+R_1)} = i \cdot V_0(ZC_1) + 1 \cdot V_0(ZC_1)$$

$$V_0(IF_1, i) = V_0(IF_0, i) - V_0(ZC_0) + V_0(ZC_1)\left[1+i\right]$$

$$V_0(IF_2, i) = V_0(IF_1, i) - V_0(ZC_1) + V_0(ZC_2)\left[1+i\right]$$

$$\ldots$$

$$V_0(IF_k, i) = V_0(IF_{k-1}, i) - V_0(ZC_{k-1}) + V_0(ZC_k)\left[1+i\right]$$

Neutralisation du remboursement en k-1 puis ajout en k de (i+1)

Le prix du titre est déterminé par récurrence (AR 1 bien adapté à Excel)

Modèle avec un taux directeur **Rendement d'une obligation IN FINE en t**

Recherche du rendement actuariel avec la fonction TRI de Excel

$$V_0(IF_k,i) = \sum_{j=1}^{k} \frac{i}{(1+y_k)^j} + \frac{1}{(1+y_k)^{k}} = i \cdot \left[\frac{1-(1+y_k)^{-k}}{y_k} \right] + (1+y_k)^{-k}$$

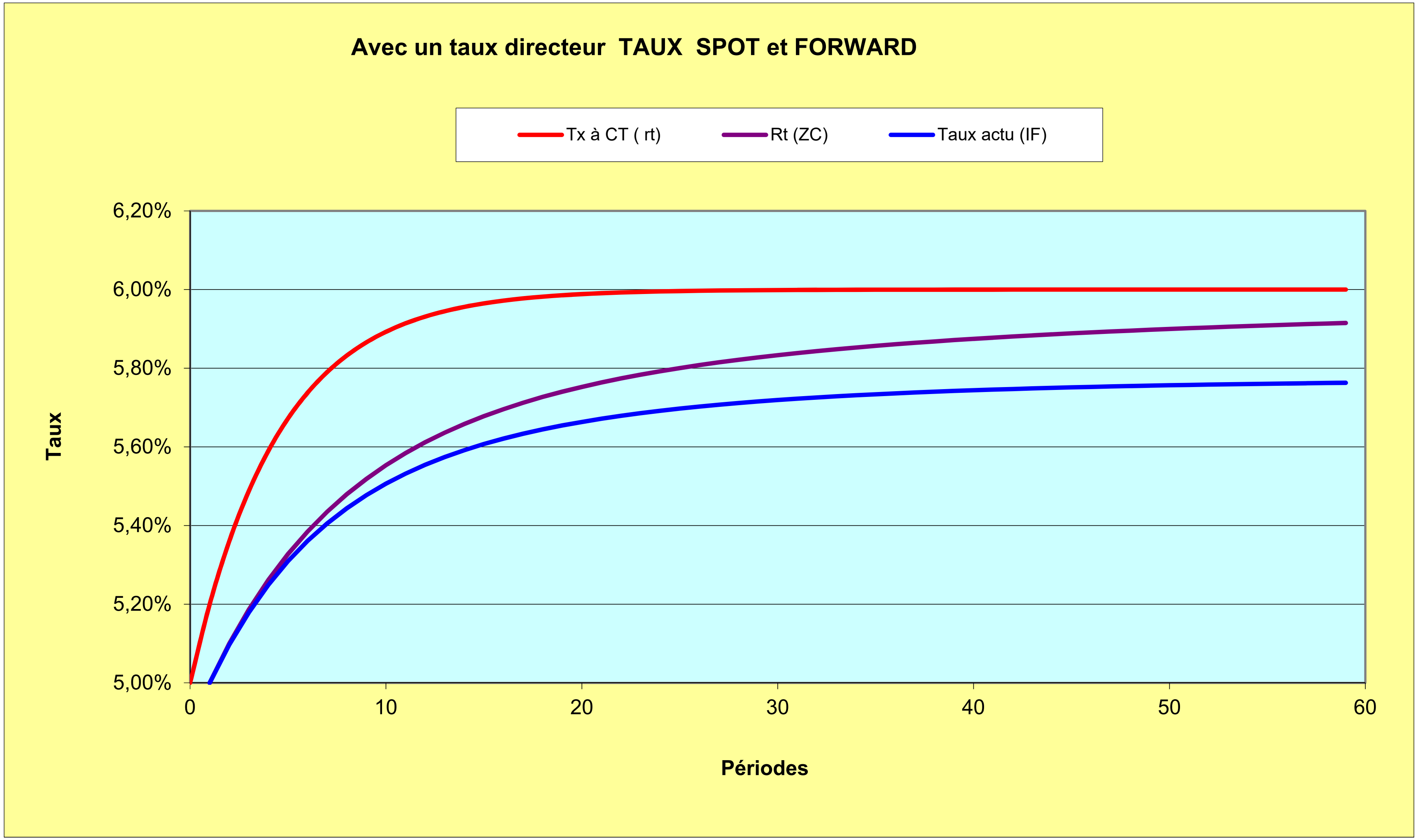
$$V_0(IF_k,i) = \frac{i}{y_k} + \left(\frac{y_k - i}{y_k} \right) (1+y_k)^{-k}$$

Vecteur des flux : **$V_0(IF_k,i)$ -i -i -i -i … -i - i -(1+i)** (traiter séparément le premier)
Taux estimé = **taux au comptant R_k**

=TRI (($V_0(IF_k,i)$;INDEX(vecteur des coupons - i ; pointeur) : -(1+i)) ; taux estimé Rk)

Pour ajuster le nombre de coupons à considérer, il suffit de mettre le pointeur de la fonction Index au bon endroit !
Quand k = 1, $y_1 = R_1 = r_o$
Avec un vecteur de n termes - i,
si k=2, le pointeur doit être sur le n ième terme (pointeur = n+1 -2)
si k=3, le pointeur doit être sur l'avant dernier (pointeur = n+1 – 3) et … n+1-k

Modèle avec un taux directeur **Représentation graphique**



Paramètres : $r_0 = 5{,}00\%$ $b = 6{,}00\%$ $a = 0{,}2$ et $i = 6{,}50\%$

la juxtaposition d’un taux *spot* et d’un taux *forward* n’a pas beaucoup de sens en finance !
et pour le taux de rendement actuariel, il est préférable de prendre la duration en abscisse

Modèle avec deux taux directeurs **Calcul du taux court et du taux long en t**

Le taux court converge vers le taux long qui tend, lui-même, vers le taux normal à long terme (m)

$$\Delta l_k = c(m - l_k)\Delta_t \quad \text{et} \quad \Delta r_k = a(l_k - r_k)\Delta_t$$

$$\text{avec} \quad \Delta_t = 1, \quad 0 < a < 1, \quad 0 < c < 1, \quad r_0, l_0, m > 0$$

$$l_k = m + (l_0 - m) \cdot (1 - c)^k$$

Le calcul est similaire au cas précédent.

$$r_k = m + (r_0 - m) \cdot (1 - a)^k + a\left(\frac{(l_0 - m)}{a - c}\right)\left[(1 - c)^k - (1 - a)^k\right]$$

$$\lim_{k \to \infty} r_k = m$$

Le calcul du taux à long terme est simple mais un peu long.

Pour le calcul du taux court et du taux long en k, il est préférable de conserver la relation de type AR(1)

$$l_k = l_{k-1}(1 - c) + cm \quad \text{et} \quad r_k = r_{k-1}(1 - a) + a l_{k-1}$$

Toutes les autres relations restent inchangées car, seulement dépendantes de r_k

Modèle avec deux taux directeurs **Recherche du taux court**

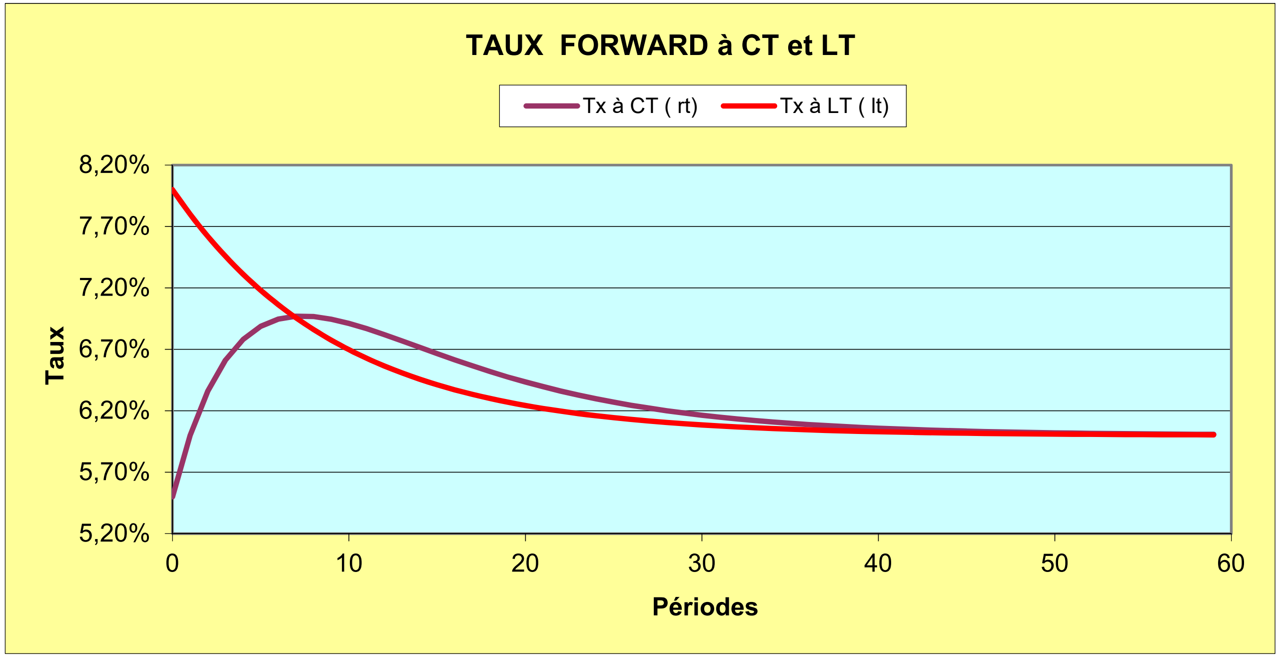
$$r_1 = r_0(1-a) + al_0$$
$$r_2 = r_1(1-a) + al_1 = r_0(1-a)^2 + a\left[l_0(1-a) + l_1\right]$$
$$r_3 = r_2(1-a) + al_2 = r_0(1-a)^3 + a\left[l_0(1-a)^2 + l_1(1-a) + l_2\right]$$

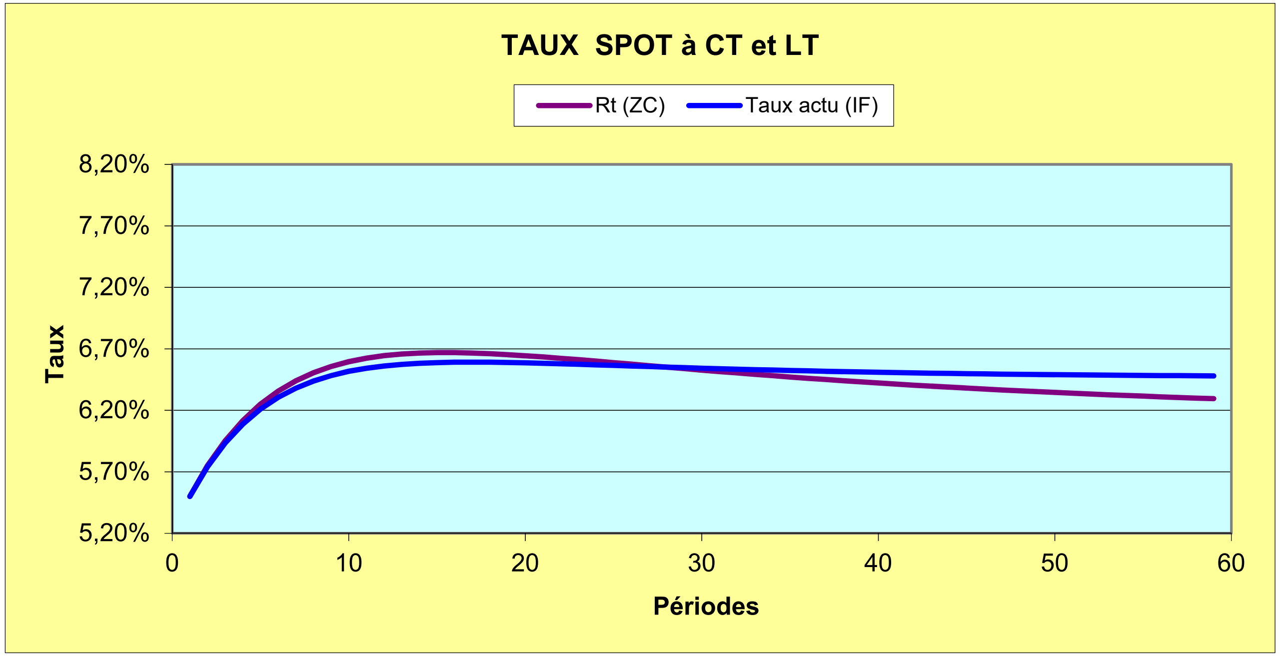
$$r_k = r_0(1-a)^k + a\left[\sum_{j=0}^{k-1} l_j(1-a)^{k-1-j}\right] = r_0(1-a)^k + a\left[\sum_{j=0}^{k-1}\left(m + \left(l_0 - m\right)(1-c)^j\right)(1-a)^{k-1-j}\right]$$
$$= r_0(1-a)^k + am\left[\sum_{j=0}^{k-1}(1-a)^{k-1-j} + a\left(l_0 - m\right)\frac{(1-a)^k}{(1-a)}\sum_{j=0}^{k-1-j}\left(\frac{1-c}{1-a}\right)^j\right]$$
$$= r_0(1-a)^k + am(1-a)^k\left[\frac{(1-a)^{-k} - 1}{a}\right] + \frac{al_0 - am}{a-c}(1-a)^k\left[\left(\frac{1-c}{1-a}\right)^k - 1\right]$$
$$= r_0(1-a)^k + m - m(1-a)^k + \frac{al_0 - am}{a-c}\left[(1-c)^k - (1-a)^k\right]$$

$$r_k = m + (r_0 - m)\cdot(1-a)^k + \left(\frac{al_0 - am}{a-c}\right)\left[(1-c)^k - (1-a)^k\right]$$

$$r_k = m + (1-a)^k\left[r_0 + \frac{cm - al_0}{a-c}\right] + (1-c)^k\left[\frac{al_0 - am}{a-c}\right]$$

Modèle avec deux taux directeurs **Représentation graphique**





Paramètres :

r_o = 5,50%
l_o = 8,00%
m = 6,00%

a = 0,2
c = 0,1

i = 6,50%

Des formes non monotones sont possibles pour le taux à court terme et les rendements

Modèle avec deux taux directeurs **Recherche de l'optimum du taux court**

$$r_k = m + (1-a)^k \left[r_0 + \frac{cm - al_0}{a-c} \right] + (1-c)^k \left[\frac{al_0 - am}{a-c} \right]$$

$$\frac{\partial r_k}{\partial k} = \left[r_0 + \frac{cm - al_0}{a-c} \right] (1-a)^{k^*} \log(1-a) + \left[\frac{al_0 - am}{a-c} \right] (1-c)^{k^*} \log(1-c) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{(1-a)^{k^*}}{(1-c)^{k^*}} = \frac{-\left[\frac{al_0 - am}{a-c} \right] \log(1-c)}{\left[r_0 + \frac{cm - al_0}{a-c} \right] \log(1-a)} \Rightarrow k^* = \frac{\log \left(\frac{\left[\frac{am - al_0}{a-c} \right] \log(1-c)}{\left[r_0 + \frac{cm - al_0}{a-c} \right] \log(1-a)} \right)}{\log \left(\frac{1-a}{1-c} \right)}$$

$$k^* = \frac{\log \left(\left[\frac{am - al_0}{a-c} \right] \log(1-c) \right) - \log \left(\left[r_0 + \frac{cm - al_0}{a-c} \right] \log(1-a) \right)}{\log(1-a) - \log(1-c)}$$

Prix d’un Zéro Coupon en absence de dynamique de taux

dr = 0dt avec r_0 connu $F(r,t,T) = F(r,\tau)$ $[\tau=T-t\,]$ et $F(r,0) = 1$

$F_r - F_\tau - rF = 0$ $E(dF(r,\tau) = rF(r,\tau)$

$F(r,\tau) = \exp\,(-r_0\tau) = \exp(-R_\tau\tau)$

Prix d’un Zéro Coupon avec un processus d’Ornstein-Uhlenbeck déterministe

dr = a(b-r)dt avec $r_t = b - (r_0-b)e^{-at} = r_0e^{-at} + b(1-e^{-at})$

$a(b-r)F_r - F_T - rF = 0$

$F(r,\tau) = \exp\,[-bT - (r_0-b)\left(\frac{(1-e^{-at})}{a}\right)\,] = \exp(-R_T T)$

avec $R_T = b - (r_0-b)\left(\frac{(1-e^{-at})}{a}\right)$

Prix d'un Zéro Coupon avec un processus d'Ornstein-Uhlenbeck stochastique

$dr = a(b-r)dt + \sigma dZ$ avec $r_t = r_0 e^{-at} + b(1-e^{-at}) + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{-ats} dZ_s$

[Vasicek, 1977]

$E(r_t)$ $\quad V(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})$

$$\lim_{t\to\infty} E(r_t) = b \qquad \lim_{t\to\infty} V(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}$$

$\sigma^2/2 F_{rr} + a(b-r)F_r - F_T - rF = 0$

$$F(r,\tau) = \exp[-\tau R_\infty - (r_0 - R_\infty)\left(\frac{1-e-^{a\tau}}{a}\right) - \frac{\sigma^2}{4a}\left(\frac{1-e-^{a\tau}}{a}\right)^2] \quad \text{avec } R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^3}$$

$dr = a(b-r)dt + \sigma\sqrt{r}dZ$ **$\sqrt{r}$** *permet d'éviter les taux d'intérêt négatifs*

[Cox-Ingersoll-Ross, 1985]

Solution de la forme $F(r,\tau) = A(\tau)e^{-B(\tau)r}$

Possibilité d'évaluer dans une économie neutre au risque (facteur λ)