Université de Montpellier
—Faculté des Sciences—
Département de Mathématiques

Année universitaire 2017-2018
Prépa Agro-Véto — HLMA509

# Feuille d'exercices sur les espaces vectoriels

Dans les exercices qui suivent, $E$ désigne un espace vectoriel réel.

## 1. Combinaisons linéaires

**Exercice 1.** Déterminer si les vecteurs $(1, -1)$ et $(0, 0)$ sont combinaison linéaire des vecteurs $u_1 = (1, 1)$ et $u_2 = (1, -2)$. Plus généralement, quels sont les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui sont combinaison linéaire de $u_1$ et $u_2$ ?

**Exercice 2.** Le vecteur $(3, 7, -4)$ est-il combinaison linéaire des vecteurs $(1, 2, 3), (2, 3, 7)$ et $(3, 5, 6)$ ? Si oui, les coefficients de la combinaison linéaire sont-ils déterminés de manière unique ?

**Exercice 3.** A quelle condition sur les nombres réels $a, b, c$ le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ est-il combinaison linéaire de $(-1, 2, 2)$ et $(2, 1, -1)$ ?

**Exercice 4.** Le vecteur $(1, 2, 3)$ est-il colinéaire à $(0, 0, 0)$ ? Le vecteur $(0, 0, 0)$ est-il colinéaire à $(1, 2, 3)$ ? Les vecteurs $(0, 0, 0)$ $(1, 2, 3)$ sont-ils colinéaires ?

## 2. Sous-espaces vectoriels

**Exercice 5.** Montrer, en revenant à la définition, que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + -2z = 0\}$les sous-ensembles suivants est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 6.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ : $A = \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ; $B = \{(2x, 1) \mid x \in \mathbb{R}\}$ ; $C = \{(s + 2t, s, t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

**Exercice 7.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ : $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \leq 0\}$ ; $B = \{(x, y \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ ; $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = -1\}$ ; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

**Exercice 8.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices $2 \times 2$ réelles : (1) l'ensemble des matrices dont la première colonne est nulle ; (2) l'ensemble des matrices dont tous les coefficients sont positifs ou nuls ; (3) l'ensemble des matrices dont les deux lignes sont identiques.

**Exercice 9.** Montrer le plus rapidement possible que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; x + y + z = 0, -2x + 3y - z = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

## 3. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs

**Exercice 10.** Montrer que $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

**Exercice 11.** Déterminer si le vecteur $(8, 2, -9)$ appartient au sous-espace de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $(2, 3, -5)$ et $(-4, -5, 8)$.

**Exercice 12.** Existe-t-il des réels $x, y$ tels que le vecteur $v = (-2, x, y, 3)$ appartienne au sous-espace vectoriel engendré dans $\mathbb{R}^4$ par la famille $(e_1, e_2)$, où $e_1 = (1, -1, 1, 2)$ et $e_2 = (-1, 2, 3, 1)$ ?

**Exercice 13.** (1) Montrer que $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + 3z = 0\} = \mathrm{Vect}((1, 2, 0), (0, 3, 1))$.

(2) Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\mathrm{Vect}((1, 2, -1), (-6, 0, 2)) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\}$.

**Exercice 14.** Déterminer une équation linéaire (ou un système d'équations linéaires) caractérisant les éléments de $\mathrm{Vect}((1, -2, 5, -3), (2, 3, 1, -4), (3, -8, -2, 7))$.

## 4. Sommes, sommes directes, sous-espaces supplémentaires

**Exercice 15.** On se place dans $E = \mathbb{R}^4$. On définit $F = \mathrm{Vect}(1, 1, 1, 1)$ et $G = \{(x, y, z, t); x + y + z + t = 0\}$.

(1) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $E$.

(2) Montrer que $E = F \oplus G$.

**Exercice 16.** On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et $\mathcal{I}$ l'ensemble des fonctions impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(2) Montrer que $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$. Décomposer la fonction exp dans cette somme directe.

## 5. Familles génératrices, familles libres

**Exercice 17.** (1) Déterminer une famille génératrice de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\}$.

(2) Montrer que $((-3, 2, 1), (1, 0, -1))$ est une famille génératrice de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

**Exercice 18** (ENSA 2011)**.** Soit $a$ un nombre réel. Soient $u, v, w$ les vecteurs de $\mathbb{R}^3$ définis par $u = (1, -2, 0)$, $v = (1, a, 0)$ et $w = (0, 0, 1)$. Pour quelle valeur de $a$ ces vecteurs sont-ils linéairement indépendants ?

**Exercice 19.** On suppose que la famille $(u, v, w)$ est libre. Montrer qu'alors la famille $(v + w, u + w, u + v)$ est également libre.

## 6. Bases, dimension

**Exercice 20.** Déterminer une base des espaces vectoriels suivants :

(1) $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 5y + z = 0, y + z = 0\}$.

(2) $E_2 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + z - 2t = 0, x + y + t = 0, 2x - y + 3z = 0\}$.

(3) $E_3 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_1 = 2x_2 - x_3, x_4 = x_1 + x_2 + x_3\}$.

**Exercice 21.** On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ suivants : $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - 2y = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; y + 2z + 3t = 0\}$. Donner une base et la dimension de $F$, de $G$, de $F \cap G$.

**Exercice 22.** Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 3x - y + 2z = 0\}$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, déterminer une base de $F$, donner la dimension de $F$, puis compléter la base trouvée en une base de $\mathbb{R}^3$.

**Exercice 23** (Oral ENV 2006, modifié)**.** (1) Justifier que $F = \{(x; y; z; t) \in \mathbb{R}^4 / x + y - 2z = t \text{ et } t - x + y = 0\}$ est un espace vectoriel.

(2) Donner une base et la dimension de $F$.

(3) On note $G_1 = \mathrm{Vect}((0; 1; 1; 0), (-1; 4; 0; 1))$ et $G_2 = \mathrm{Vect}((0; -1; 1; 0), (-1; 4; 0; 1))$.

  (a) Déterminer la dimension de $G_1$ et celle de $G_2$.

  (b) Montrer que $F \cap G_1 = 0$. En déduire que $F \oplus G_1 = \mathbb{R}^4$.

(c) Est-ce que $F \oplus G_2 = \mathbb{R}^4$ ?

**Exercice 24.** Soit $E$ (respectivement $F$) le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $e_1$ et $e_2$ (respectivement par les vecteurs $e_3$ et $e_4$), où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_4 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Montrer que $E$ et $F$ sont égaux.

**Exercice 25.** Soit $F$ le sous-ensemble de $M_3(\mathbb{R})$ composé des matrices de la forme :

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

On pose $I = M(1,0)$ et $J = M(1,1)$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$, de base $(I, J)$.

## 7. Révision sur les systèmes linéaires

**Exercice 26.** Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} -x + y - 2z = -4 \\ -x - y - z = -11 \\ 2x + y - z = 8 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + 2y + z + t = 0 \\ x + y - z - t = 8 \\ 2x + y + z + t = -1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$$

**Exercice 27.** Résoudre le système linéaire suivant en les variables $x, y, z$ en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

## 8. Exercices supplémentaires

Les exercices de cette section sont plus difficiles ou plus abstraits que les précédents, ou font appel à des notions que vous ne connaissez pas nécessairement pour le moment ; ils peuvent être abordés en seconde lecture.

**Exercice 28.** Montrer que la fonction polynomiale $x^3 - 2x^2 + 2x$ est combinaison linéaire des fonctions $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$.

**Exercice 29.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ : (1) le sous-ensemble $A$ constitué des fonctions dérivables ; (2) le sous-ensemble $B$ constitué des fonctions $f$ deux fois dérivables vérifiant $f'' + 2f' - 3f = 0$ ; (3) le sous-ensemble $C$ constitué des fonctions $f$ telles que $f(0) = 1$ ; (4) le sous-ensemble $D$ constitué des fonctions $f$ telles que $f(1) = 0$.

**Exercice 30.** On pose $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

(1) Montrer que $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

(2) Montrer que $F \cap G = \{(2y, y, 3y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

**Exercice 31.** Dans $E = \mathcal{S}_{\mathbb{N}}$, déterminer si les sous-ensembles suivants sont stables par addition et/ou stables par multiplication scalaire : (1) le sous-ensemble $A$ constitué des suites $u$ telles que $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; (2) le sous-ensemble $B$ constitué des suites $u$ telles que $u_n u_{n+2} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ; (3) le sous-ensemble $C$ constitué des suites $u$ qui admettent une limite ; (4) le sous-ensemble $D$ constitué des suites $u$ qui admettent une limite égale à $\pi$ .

**Exercice 32.** Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de l'espace vectoriel $M_2(\mathbb{R})$ des matrices $2\times 2$ réelles : (1) l'ensemble des matrices de trace nulle ; (2) l'ensemble des matrices inversibles ;

**Exercice 33.** Soient $F, G$ deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel $E$. On souhaite montrer que $F \cup G$ est un sous-espace de $E$ si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$. Pour cela :

(1) Montrer que l'un des deux sens du « si et seulement si » est évident.

(2) Pour démontrer l'autre sens, raisonner par l'absurde (comment nie-t-on un « ou » ? comment nie-t-on une inclusion ? penser à utiliser toutes les hypothèses).

**Exercice 34.** Soient $u, v$ deux vecteurs de $E$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u + v, u - v)$.

**Exercice 35.** Soit $E$ un espace vectoriel admettant une base $(e_1, e_2, e_3)$. Montrer que $(e_2 + e_3, e_1 + e_3, e_1 + e_2)$ est également une base de $E$.