



Session : examen session 2

Date : 26/06/2025

L3 Licence Mathématiques & Mécanique

Parcours : MG, CUPGE

UE : Analyse numérique des équations différentielles. (HAX604X)

Durée de l'épreuve : 2h

Documents autorisés : néant

Matériels autorisés : néant.

Les exercices sont indépendants les uns des autres et peuvent être traités dans l'ordre que vous souhaitez. Barème indicatif. La notation tiendra compte du soin apporté à la rédaction.

Exercice 1. (4 pts) Soit l'équation différentielle

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = y_0. \quad (1)$$

On considère le schéma suivant (dit du point-milieu) :

$$y_{n+1} = y_n + h f \left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n) \right)$$

où l'on note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On suppose que f est suffisamment régulière et que $y \mapsto f(t, y)$ est globalement lipschitzienne de rapport L , indépendant de t .

1. (2pts) Estimer l'ordre de grandeur de l'erreur de consistance du schéma quand $h \rightarrow 0$.
2. (1pt) Montrer que, pour t_n et h fixés, l'application $y \mapsto f \left(t_n + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(t_n, y) \right)$ est Lipschitzienne.
3. (1pt) On fixe $T > 0$. Estimer l'ordre de grandeur de $\max_{0 \leq t_n \leq T} |y(t_n) - y_n|$ quand $h \rightarrow 0$. Quel est l'ordre du schéma ? Justifiez vos réponses.

Exercice 2 (5 pts) Soit l'équation différentielle $y'(t) = f(t, y(t))$ où la fonction f est suffisamment régulière et Lipschitzienne par rapport à la variable y . On note $t_n = n \cdot h$ où $h > 0$ désigne le pas de temps, et $n \in \mathbb{N}$. On note $f_k = f(t_k, y_k)$ pour $k \in \mathbb{N}$. Le schéma de Adams-Moulton est donné par

$$y_{n+1} = y_n + h \left(\frac{5}{12} f_{n+1} + \frac{8}{12} f_n - \frac{1}{12} f_{n-1} \right).$$

C'est un schéma multipas qui permet de calculer y_{n+1} étant donnés y_n et y_{n-1} .

1. (1pt) Précisez si le schéma est *explicite* ou *implicite*.
2. (1pt) Montrer que le schéma est stable.
3. (1pt) Montrer que le schéma est consistant.
4. (1pt) Montrer que l'erreur de consistance est $\mathcal{O}(h^4)$.
5. (1pt) Est-ce que le schéma est convergent ? Quelle est l'ordre de convergence du schéma ? Justifiez vos réponses.

T.S.V.P.

Exercice 3. (5 pts) On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + (tx) u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (2)$$

où f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 .

1. (1pt) Rappeler la définition des courbes caractéristiques de l'équation (2).
2. (1pts) Déterminer les courbes caractéristiques de l'équation (2).
3. (2pts) En déduire la solution $u(x, t)$ de l'EDP (2).
4. (1pt) Pour x fixé, quelle est la limite de $u(x, t)$ quand $t \rightarrow +\infty$?

Exercice 4. (6 pts) Soit $c > 0$ une constante réelle strictement positive. On considère l'équation aux dérivées partielles

$$u_t + c u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0 \quad (3)$$

Soit un pas de temps δt et un pas d'espace δx . On définit $x_j = j\delta x$ et $t_n = n\delta t$ pour $j \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. On note u_j^n une valeur approchée de $u(x_j, t_n)$ calculée par le schéma numérique explicite décentré suivant :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\delta x} = 0$$

Dans la suite on pose

$$r = \frac{c \cdot \delta t}{\delta x}.$$

1. (1pt) Montrer que le schéma s'écrit sous la forme

$$u_j^{n+1} = r u_{j-1}^n + (1 - r) u_j^n.$$

2. (1 pt) Montrer que si $0 < r \leq 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\inf_j u_j^0 \leq u_j^n \leq \sup_j u_j^0$.
3. (1pt) Montrer que l'erreur de consistance du schéma $\epsilon(\delta t, \delta x)$ vérifie :

$$\epsilon(\delta t, \delta x) = \mathcal{O}(\delta t^2) + \mathcal{O}(\delta t \delta x).$$

4. (1 pt) On pose $E_j^n := u(x_j, t^n) - u_j^n$ l'erreur d'approximation. Montrer que

$$E_j^{n+1} = r E_{j-1}^n + (1 - r) E_j^n + \epsilon(\delta t, \delta x).$$

5. (1pt) On suppose désormais que $0 < r \leq 1$. On note $\|E^n\|_\infty := \sup_{j \in \mathbb{Z}} |E_j^n|$. Démontrer la majoration

$$\|E^{n+1}\|_\infty \leq \|E^n\|_\infty + C \delta t (\delta t + \delta x),$$

où C est une constante convenable. (On suppose que u_{tt} et u_{xx} sont bornées sur \mathbb{R} .)

6. (1pt) Soit $N \geq 1$ un entier fixé. On pose $T = N\delta t$. On suppose que $u_j^0 = f(x_j) = u(x_j, 0)$. Montrer que

$$\forall n \leq N, \|E^n\|_\infty \leq C T (\delta t + \delta x)$$

et en déduire la convergence ainsi que l'ordre du schéma.
