UNIVERSITÉ DE MONTPELLIER
FACULTÉ D'ÉCONOMIE
Année universitaire 2023-2024 - EXAMENS

Année d'étude : Licence 1	Enseignant : M. Beaud
Matière : Mathématiques pour économistes	Durée : 1h30
Semestre : 2	Session : 1

Documents autorisés: non
Dictionnaires autorisés pour les étudiants non francophones: oui
Calculatrices non programmables autorisée: oui

L'utilisation du téléphone portable durant les épreuves est formellement interdite.

Questions (*10 points*, *chaque question vaut 1 point*)

- **Question 1**
  On considère une fonction à n variables $y = f(x_1,\ldots,x_i,\ldots x_n)$ définie sur R^n. Donner la formule définissant, par la limite, la dérivée partielle d'ordre 1 par rapport à la variable x_i.

- **Question 2**
  On considère une fonction à n variables $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est additivement séparable, quelle est la forme de cette fonction ? Que pouvez-vous en conclure concernant ses dérivées partielles d'ordre 1 ? Donner un exemple numérique d'une telle fonction lorsque n = 2.

- **Question 3**
  On considère une fonction à n variables $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Combien de dérivées partielles d'ordre 2 possède cette fonction ?

- **Question 4**
  On considère une fonction à n variables $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Ecrire le gradient et la matrice Hessienne de cette fonction.

- **Question 5**
  Pourquoi la matrice Hessienne d'une fonction à plusieurs variables est toujours symétrique ? De quel Théorème est-ce la conséquence ?

- **Question 6**
  On considère une fonction à n variables $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Si cette fonction est additivement séparable, que pouvez vous en conclure concernant ses dérivées partielles d'ordre 2? Quelle est la forme particulière de sa matrice Hessienne ?

- **Question 7**
  On considère une fonction à 2 variables $y = f(x_1,x_2)= x_1x_2$ définie sur R^2. Calculer sa différentielle totale d'ordre 1. Utiliser la différentielle totale pour calculer la variation de y lorsque l'on passe du point (1,1) au point (6,5). Utiliser la différentielle totale pour calculer la variation de y lorsque l'on passe du point (1,1) au point (1.3,1.2). Comparer ces résultats avec les variations exactes de la fonction. Commenter.

- **Question 8**
  On considère une fonction à n variables $y = f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ définie sur R^n. Ecrire cette fonction sous la forme d'une fonction implicite F. En utilisant le Théorème des fonctions implicites, écrire $f_2 = \partial y/\partial x_2$ en fonction des dérivées partielles de F.

- **Question 9**
  On considère une fonction à 2 variables $y = f(x_1,x_2)$ définie sur R^2. Calculer la différentielle totale d'ordre 2.

- **Question 10**
  On considère une fonction à 3 variables $y = f(x_1,x_2,x_3)$ définie sur R^3. Ecrire les sous matrices principales successives d'ordre 1, 2 et 3 de la matrice Hessienne.

Exercice *(10 points, 2 points pour chaque fonction)*

- Déterminer le ou les points stationnaires pour chacune des fonctions suivantes. A chaque fois, déterminer s'il s'agit d'un maximum global ou local, d'un minimum global ou local, ou d'un point de selle.

  (i) $f(x_1,x_2) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2$

  (ii) $f(x_1,x_2) = 4x_1 + 2x_2 - (x_1)^2 - (x_2)^2 + x_1x_2$

  (iii) $f(x_1,x_2) = 4(x_1)^2 - x_1x_2 + (x_2)^2 - (x_1)^3$

  (iv) $f(x_1,x_2,x_3) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 4(x_3)^2 - x_1 + 2x_3$

  (v) $f(x_1,x_2) = (x_1)^2 - (x_2)^2$