MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

Corrigé de l'Examen du 20 mai 2025
Durée : 3h

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.
Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction.

Questions isolées (13 points)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Donner la définition de la limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf u_n$.

Il faut rappeler la définition, pas une propriété qui "appelle" une autre définition !
Par exemple, $\liminf u_n := \lim_{n\to+\infty} \underline{u}_n$, où $\underline{u}_n = \inf\{u_p, p \geq n\}$.

2. Énoncer le théorème des accroissements finis, puis montrer que $F(x) := \cos(\frac{x^2}{3} + 1)$ définit une application contractante $F\colon [0,1] \to [0,1]$, et que pour tout $u_0 \in [0,1]$ la suite (u_n) définie par $u_{n+1} := F(u_n)$ est convergente.

Pour l'enoncé du TAF et la définition d'une application contractante, voir le cours. Ici on a F dérivable sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $[0,1]$, et $F'(x) := -\frac{2}{3}x\sin(\frac{x^2}{3}+1)$. Donc $|F'(x)| \leq \frac{2}{3}$ pour tout $x \in [0,1]$. D'après l'inégalité du TAF, ceci montre que F est contractante sur $[0,1]$. Le théorème du point fixe implique alors que pour tout $u_0 \in [0,1]$ la suite (u_n) définie par $u_{n+1} := F(u_n)$ est convergente.

3. Calculer la limite de la fonction

$$f(x) := \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - 1}, \quad x \neq 0,$$

lorsque x tend vers 0.

On peut faire un calcul algébrique avec les quantités conjuguées, ou faire un DL en 0. On a

$$f(x) = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{1+\frac{x^2}{2}} - 1)}{\sqrt{1+x^2} - 1} = \frac{\sqrt{2}(\frac{x^2}{4} + o(x^2))}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \frac{\sqrt{2}}{2} + o(1).$$

Donc $\lim_{x\to 0, x\neq 0} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de $g(x) = \ln(\cos(x))$, puis en déduire la limite de $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$ lorsque $x \to 0$.

On a

$$g(x) = \ln(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) = (-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)) - \frac{1}{2}(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4))^2 + o(x^4)$$
$$= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4).$$

Alors $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}} = \exp(\frac{g(x)}{x^2}) = \exp(-\frac{1}{2} + o(1))$, et finalement $\lim_{x\to 0, x\neq 0}(\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}) = \exp(-\frac{1}{2})$.

5. Montrer que la fonction $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x + 1}$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

(*Il faut donner les valeurs explicites des réels a, b et c.*)

On a (en appliquant un $DL_2(0)$ de "$1/(1-X)$" où $X = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$, dans la seconde égalité) :

$$h(x) = \frac{x^3 - x}{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}$$
$$= (x - \frac{1}{x})(1 + (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}) + (\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})^2 + o(\frac{1}{x^2}))$$
$$= x + 1 - \frac{1}{x} + o(\frac{1}{x})$$

après simplifications.

6. Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange, puis montrer que pour tout $t \geq 0$ on a l'encadrement

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(1+t)^3} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

En déduire une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-4} près. *On se servira du fait que* $(1,1)^{-3} > 0,75$.

Pour l'enoncé du théorème de Taylor-Lagrange, voir le cours. On applique ce théorème à la fonction $t \mapsto \ln(1+t)$ sur le segment $[0,t]$, où $t \geq 0$; on trouve qu'il existe $\xi \in [0,t]$ tel que $\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(1+\xi)^3}$. Comme $\frac{t^3}{3(1+t)^3} \leq \frac{t^3}{3(1+\xi)^3} \leq \frac{t^3}{3}$, l'encadrement s'ensuit. Pour $t = 10^{-1}$ on majore la différence (terme de droite - terme de gauche) :

$$0 \leq \frac{(0,1)^3}{3} - \frac{(0,1)^3}{3(1,1)^3} \leq \frac{(0,1)^3}{3}(1 - 0,75) \leq 10^{-4}.$$

Donc $r = 10^{-1} - \frac{10^{-2}}{2} + \frac{10^{-3}}{3}$ est une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-4} près.

7. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries numériques suivantes :

$$U = \sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\,(\cos(1/n) - 1) \qquad V = \sum_{n\geq 0} (\ln(1 + 1/n))^n.$$

Via un DL de cos en 0 on a $\sqrt{n}\,(\cos(1/n) - 1) \sim -1/n^{\frac{3}{2}}$, et $\sum_{n\geq 1} 1/n^{\frac{3}{2}}$ converge par critère de Riemann. Par comparaison de séries à termes généraux de signe constant (ils sont négatifs) et équivalents, on déduit que U converge.

Les termes généraux de V sont des puissances de n, donc il est naturel d'appliquer le critère de Cauchy : si on pose $v_n := (\ln(1 + 1/n))^n$, alors $v_n^{1/n} = \ln(1 + 1/n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Donc $V = \sum_{n\geq 1} v_n$ converge.

Exercice (8 points)

On considère la suite $V_n = \sum_{k=1}^n \sqrt[3]{k}$, définie pour $n \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt[3]{t}\, dt \leq \sqrt[3]{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt[3]{t}\, dt.$$

Pour tout $x \in [k, k+1]$ on a $\sqrt[3]{k} \leq \sqrt[3]{x} \leq \sqrt[3]{k+1}$ (la fonction $\sqrt[3]{\ }$ est croissante), donc en intégrant $\sqrt[3]{k} = \int_k^{k+1} \sqrt[3]{k}\, dt \leq \int_k^{k+1} \sqrt[3]{t}\, dt \leq \int_k^{k+1} \sqrt[3]{k+1}\, dt = \sqrt[3]{k+1}$. La double inégalité s'ensuit.

(2) En déduire que $V_n \sim \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}}$.

En sommant les inégalités de la question (1) de $k = 1$ à n on obtient

$$\int_{0}^{n} \sqrt[3]{t}\, dt \leq V_n \leq \int_{1}^{n+1} \sqrt[3]{t}\, dt.$$

On a $\int_0^n \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}}$ et $\int_1^{n+1} \sqrt[3]{t}\, dt = \frac{3}{4} ((n+1)^{\frac{4}{3}} - 1)$, qui est équivalent à $\frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}}$. Donc $V_n \sim \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}}$.

(3) Déterminer pour quels réels α, la série $\sum \frac{V_n}{n^\alpha}$ est convergente.

La série $\sum \frac{V_n}{n^\alpha}$ est à termes général $\frac{V_n}{n^\alpha}$ positif, et $\frac{V_n}{n^\alpha} \sim \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}-\alpha}$. D'après le critère de Riemann, la série de terme général $n^{\frac{4}{3}-\alpha}$ converge si, et seulement si, $\frac{4}{3} - \alpha < -1$. Par comparaison de séries à termes généraux de signe constant et équivalents, il s'ensuit que $\sum \frac{V_n}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > \frac{7}{3}$.

(4) On étudie maintenant la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$.

(a) Montrer que la relation $\frac{V_n}{n^2} \geq \frac{V_{n+1}}{(n+1)^2}$ est équivalente à

$$(\star) \qquad V_n \geq \frac{n^2 \sqrt[3]{n+1}}{2n+1}.$$

On écrit $V_{n+1} = V_n + \sqrt[3]{n+1}$; la relation $\frac{V_n}{n^2} \geq \frac{V_{n+1}}{(n+1)^2}$ équivaut alors à $V_n(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}) \geq \frac{\sqrt[3]{n+1}}{(n+1)^2}$. En simplifiant le facteur de gauche on trouve $(\star)$.

(b) Au moyen d'équivalents, montrer que $(\star)$ est satisfait à partir d'un certain rang.

On a $\frac{n^2 \sqrt[3]{n+1}}{2n+1} \sim \frac{1}{2} n^{2+\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{2} n^{\frac{4}{3}}$. On a vu que $V_n \sim \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}}$, donc $\frac{V_n}{\frac{n^2 \sqrt[3]{n+1}}{2n+1}} \sim \frac{3}{2}$. Ceci montre qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N \Rightarrow \frac{V_n}{\frac{n^2 \sqrt[3]{n+1}}{2n+1}} \geq 1$. Donc $(\star)$ est satisfait à partir du rang N.

(c) Montrer que la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$ est convergente.

Puisque $(\star)$ est vérifiée à partir d'un certain rang, d'après la question (4a) la suite $(\frac{V_n}{n^2})$ est décroissante. On a $\frac{V_n}{n^2} \sim \frac{3}{4} n^{-\frac{2}{3}}$, donc $(\frac{V_n}{n^2})$ tend vers 0. D'après le critère spécial des séries alternées, il s'ensuit que la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$ est convergente.