MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

Examen du 20 mai 2025
Durée : 3h

La notation tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction.
Documents, calculettes et téléphones portables interdits.
Le barème est indicatif et pourra être modifié lors de la correction.

Questions isolées (13 points)

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Donner la définition de la limite inférieure de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notée $\liminf u_n$.

2. Énoncer le théorème des accroissements finis, puis montrer que $F(x) := \cos(\frac{x^2}{3} + 1)$ définit une application contractante $F\colon [0,1] \to [0,1]$, et que pour tout $u_0 \in [0,1]$ la suite (u_n) définie par $u_{n+1} := F(u_n)$ est convergente.

3. Calculer la limite de la fonction

$$f(x) := \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2} - 1}, \ x \neq 0,$$

lorsque x tend vers 0.

4. Déterminer le développement limité à l'ordre 4 en $x = 0$ de $g(x) = \ln(\cos(x))$, puis en déduire la limite de $\cos(x)^{\frac{1}{x^2}}$ lorsque $x \to 0$.

5. Montrer que la fonction $h(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - x + 1}$ admet un développement asymptotique en $+\infty$ de la forme

$$h(x) = ax + b + \frac{c}{x} + o\Big(\frac{1}{x}\Big).$$

(*Il faut donner les valeurs explicites des réels a, b et c.*)

6. Énoncer le théorème de Taylor-Lagrange, puis montrer que pour tout $t \geq 0$ on a l'encadrement

$$t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3(1+t)^3} \leq \ln(1+t) \leq t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3}.$$

En déduire une approximation de $\ln(1,1)$ à 10^{-4} près. *On se servira du fait que* $(1,1)^{-3} > 0,75$.

7. Déterminer la nature (convergente ou divergente) des séries numériques suivantes :

$$U = \sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\,(\cos(1/n) - 1) \qquad V = \sum_{n\geq 0} (\ln(1+1/n))^n.$$

Exercice (8 points)

On considère la suite $V_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt[3]{k}$, définie pour $n \geq 1$.

(1) Montrer que pour tout entier $k \geq 1$, on a

$$\int_{k-1}^{k} \sqrt[3]{t}\, dt \leq \sqrt[3]{k} \leq \int_{k}^{k+1} \sqrt[3]{t}\, dt.$$

(2) En déduire que $V_n \sim \frac{3}{4} n^{\frac{4}{3}}$.

(3) Déterminer pour quels réels α, la série $\sum \frac{V_n}{n^\alpha}$ est convergente.

(4) On étudie maintenant la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$.

(a) Montrer que la relation $\frac{V_n}{n^2} \geq \frac{V_{n+1}}{(n+1)^2}$ est équivalente à

$$(\star) \qquad V_n \geq \frac{n^2 \sqrt[3]{n+1}}{2n+1}.$$

(b) Au moyen d'équivalents, montrer que $(\star)$ est satisfait à partir d'un certain rang.

(c) Montrer que la série $\sum (-1)^n \frac{V_n}{n^2}$ est convergente.