Devoir encadré - 18 avril 2025

Exercice 1 : Calculs de DL et applications

1. En utilisant des DL, déterminer les limites des fonctions suivantes
 - (a) $\frac{\sin(x) - x}{x^3}$ en 0,
 - (b) $\frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)}$ en 0.
2. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$.
 - (a) Donner le DL de f à l'ordre 3 en 0.
 - (b) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
 - (c) Étudier la position relative du graphe de f et de la tangente au voisinage de 0.

Proposition de correction :

1. On utilise les DL usuels.
 - (a) $\frac{\sin(x) - x}{x^3} = \frac{x - x^3/3! + o(x^3) - x}{x^3} = -\frac{1}{6} + o(1)$. La limite est donc $-1/6$.
 - (b) On a
$$1 + \ln(1+x) - e^x = -x^2 + o(x^3),$$
$$1 - \cos(x) = x^2/2 + o(x^3).$$

On en déduit que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \ln(1+x) - e^x}{1 - \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(-1 + o(x))}{x^2(1/2 + o(x))} = -2.$$

2. On pourra utiliser la formule de Taylor-Young pour calculer le DL.
 - (a) $f(x) = \ln(2) + x - x^3/6 + o(x^3)$.
 - (b) L'équation de la tangente à f en 0 est $y = \ln(2) + x$.
 - (c) Comme $f(x) - y = -x^3/6 + o(x^3)$, au voisinage de 0, pour $x < 0$ (resp. $x > 0$) le graphe de f est au-dessus (resp. en-dessous) de la tangente.

Exercice 2 : Sommes de Riemann et intégrales

On s'intéresse au calcul de limites de sommes à partir d'intégrales. Considérons $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ intégrable. On note S_n la somme suivante

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right),$$

appelée somme de Riemann. Elle est associée à une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de longueur $h := \frac{b-a}{n}$.

1. Représenter la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ et la somme S_n .
2. Supposons $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$. On note $M = \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)|$. On note E_n l'erreur entre l'intégrale de f et la somme S_n , c'est-à-dire

$$E_n := \left| \int_a^b f(x) dx - h \sum_{k=0}^{n-1} f(a + kh) \right|.$$

Le but des questions suivantes est de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$ et donc que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_a^b f(x) dx.$$

- (a) Montrer que

$$E_n \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(x) - f(a+kh)) dx \right|.$$

- (b) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\left| \int_{a+kh}^{a+(k+1)h} (f(x) - f(a+kh)) dx \right| \leq M \frac{h^2}{2}.$$

- (c) En déduire que

$$E_n \leq \frac{b-a}{2n} M,$$

et conclure.

- (d) Applications : calculer les limites des sommes suivantes

i. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2},$

ii. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}.$

Proposition de correction :

1. $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k)$. S_n correspond à la somme des aires des rectangles de base $[a_k, a_{k+1}]$ et de hauteur $f(a_k)$.

2. (a) On utilise la relation de Chasles pour écrire l'intégrale sur $[a, b]$ comme une somme d'intégrales sur les sous-intervalles. Il faut ensuite utiliser que la valeur absolue de l'intégrale d'une fonction est inférieure à l'intégrale de la valeur absolue de la fonction en question. On obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t) dt - \Sigma(f) \right| &= \left| \int_a^b f(t) dt - \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t) dt - (a_{k+1} - a_k) f(a_k) \right) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f(t) - f(a_k)| dt. \end{aligned}$$

- (b) Puisque f est de classe $\mathcal{C}^1$ on peut utiliser le théorème des accroissements finis sur $[a_k, a_{k+1}]$:

$$f(t) - f(a_k) = (t - a_k) f'(\eta_k), \quad \eta_k \in]t, a_{k+1}[. \quad (1)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \int_{a_k}^{a_{k+1}} |f'(\eta_k)(t - a_k)| dt &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \int_{a_k}^{a_{k+1}} |t - a_k| dt \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \frac{(a_{k+1} - a_k)^2}{2} \\ &\leq \sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \frac{h^2}{2}. \end{aligned}$$

On conclut en utilisant que $\sup_{t \in [a, b]} |f'(t)| \leq M$.

- (c) On a

$$\left| \int_a^b f(t) dt - \Sigma(f) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} M \frac{h^2}{2}.$$

En utilisant que $h = (b - a)/n$, on obtient l'inégalité voulue. On observe que lorsque n tend vers l'infini (ou h tend vers 0), E_n tend vers 0, ce qui signifie que S_n tend vers l'intégrale de la fonction f .

3. Application.

- (a) Ici $a = 0$, $b = 1$. On a donc

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right), \end{aligned}$$

avec $f(x) = x$. Alors $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 x dx = 1/2$.

(b) On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{1+(k/n)}. \end{aligned}$$

On applique la formule avec $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = 1/(1+x)$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx = \ln(2).$$

Exercice 3 : Base de fonctions affines par morceaux

1. Soient $p_0(x) = 1 - x$ et $p_1(x) = x$ définies sur $[0, 1]$. Montrer (p_0, p_1) forme une base des fonctions affines définies sur $[0, 1]$.
2. On considère maintenant une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ constituée des $N+2$ points $x_i = ih$, $i = 0, \dots, N+1$ avec $h = \frac{1}{N+1}$. Soient $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ la famille constituée des N fonctions définies par

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h}, & \text{si } x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h}, & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{si } x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases}$$

- (a) Représenter les graphes des fonctions φ_1, φ_N et d'une fonction φ_i , pour $i = 2, \dots, N-1$. On pourra d'abord calculer $\varphi_i(x_{i-1}), \varphi_i(x_i)$ et $\varphi_i(x_{i+1})$.
- (b) Montrer que $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ est une famille libre.
- (c) On considère l'ensemble

$$H = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continues sur } [0, 1] \text{ t.q. } f(0) = f(1) = 0 \\ \text{et } f|_{[x_i, x_{i+1}]} \text{ est affine pour } i = 0, \dots, N\}.$$

Il s'agit d'un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$. Montrer que $(\varphi_i)_{i=1, \dots, N}$ est une base de H . Déterminer la dimension de H .

Proposition de correction :

1. Soit f une fonction polynomiale de degré 1. Elle s'écrit donc $f(x) = ax + b$ avec a, b deux réels. L'ensemble des fonctions polynomiales de degré 1 est donc de dimension 2. La famille (p_0, p_1) contient bien deux éléments. On observe que la famille est libre. En effet supposons $\alpha p_0(x) + \beta p_1(x) = 0$ pour tout x réel. Pour $x = 0$, on a $\alpha p_0(0) + \beta p_1(0) = 0$ implique $\alpha = 0$. En évaluant en $x = 1$, on trouve $\beta = 0$. La famille est donc libre. (p_0, p_1) forme donc une base des fonctions polynomiales de degré 1 définies sur $[0, 1]$.
2. (a) Au tableau.

- (b) Soient $\alpha_i, i = 1, \dots, N$, des réels. On considère la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^N \alpha_i \varphi_i(x) = 0$. Montrons que $\alpha_i = 0, i = 1, \dots, N$. Pour cela, on observe que $\varphi_i(x_i) = 1$ et $\varphi_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$. On évalue alors la combinaison linéaire en x_j . On obtient que $\alpha_j = 0$. En faisant de même pour chaque point $x_j, j = 1, \dots, N$, on en déduit que tous les α_i sont nuls. La famille est donc libre.
- (c) Les φ_i sont des fonctions continues sur $[0, 1]$, nulles en 0 et 1 et affines par morceaux. Ce sont donc des éléments de l'ensemble considéré, noté H . On va montrer que $(\varphi_i)_i$ forme une famille génératrice de H . Soit $v \in H$. On pose $w(x) = \sum_{i=1}^N v(x_i) \varphi_i(x)$. Sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, la fonction w coïncide avec la fonction v aux points x_i et x_{i+1} et donc sur $[0, 1]$ tout entier. Ainsi toute fonction de H s'écrit comme une combinaison linéaire des fonctions $\varphi_i, i = 0, \dots, N$.
La famille est donc génératrice. C'est donc une base de H . Comme elle compte N éléments, $\dim(H) = N$.