MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

Corrigé du CC2, 14 avril 2025
Durée : 1 h 15

La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos arguments.

Documents, calculettes et téléphones portables sont interdits.

Le barême est indicatif.

Questions

1. (2 pts) Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de $+\infty$.

(a) Rappeler la définition de "$g(x) = o_{+\infty}(f(x))$".

On a $g(x) = o_{+\infty}(f(x))$ si on peut écrire $g(x) = r(x)f(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 0$.

(b) Montrer que si $g(x) \sim_{+\infty} f(x)$, alors $f(x) - g(x) = o_{+\infty}(f(x))$.

Si $g(x) \sim_{+\infty} f(x)$, alors $g(x) = r(x)f(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty} r(x) = 1$, et donc $f(x)-g(x) = (1-r(x))f(x)$ avec $\lim_{x\to+\infty}(1 - r(x)) = 0$. Donc $f(x) - g(x) = o_{+\infty}(f(x))$.

2. (3 pts) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0, admet un $DL_1(0)$, mais n'est pas de classe C^1.

La fonction f est clairement dérivable en tout point $x \neq 0$, où $f'(x) = 2x\sin(1/x) - \cos(1/x)$. De plus

$$\lim_{x\to 0, x\neq 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x\neq 0} x\sin(1/x) = 0,$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. Lorsque $x \neq 0$ tend vers 0, $\cos(1/x)$ n'a pas de limite alors que $2x\sin(1/x)$ tend vers 0, donc $f'(x)$ n'a pas de limite. Ceci montre que f' n'est pas continue en 0, et donc f n'est pas de classe C^1. Enfin, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire $f(x) = x\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon(0) = 0$ et $\varepsilon(x) = x\sin(1/x)$ si $x \neq 0$, qui tend vers 0 lorsque $x \neq 0$ tend vers 0. Donc $f(x) = o_0(x)$, ce qui montre que f a un $DL_1(0)$.

3. (5 pts) On pose

$$f(x) := \frac{x}{\ln(1 + \sin(x))}.$$

(a) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\ln(1 + \sin(x))$, puis le $DL_2(0)$ de $f(x)$.

On a

$$\begin{aligned}
\ln(1+\sin(x)) &= \ln(1 + x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)) \\
&= (x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)) - \frac{1}{2}(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3))^2 + \frac{1}{3}(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^3))^3 + o_0(x^3) \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_0(x^3)
\end{aligned}$$

après simplifications. Alors

$$\begin{aligned}
\frac{x}{\ln(1+\sin(x))} &= \frac{x}{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+o_0(x^3)} \\
&= \frac{1}{1-(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o_0(x^2))} \\
&= 1+(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o_0(x^2))+(\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}+o_0(x^2))^2+o_0(x^2) \\
&= 1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}+o_0(x^2)
\end{aligned}$$

après simplifications.

(b) En déduire la valeur des dérivées $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0,1,2\}$.

D'après la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 2, l'unicité du DL en 0, et le $DL_2(0)$ obtenu en (a), on a

$$f(0)=1\ ,\ f'(0)=\frac{1}{2}\ ,\ f''(0)=2.\frac{1}{12}=\frac{1}{6}.$$

(c) Déterminer l'équation de la tangente D_0 au graphe Γ_f de f au point de coordonnées $(0, f(0))$, et la position de D_0 par rapport à Γ_f.

L'equation cartésienne de D_0 est $y = f(0) + f'(0)(x-0)$, soit $y = 1+\frac{x}{2}$ d'après (b). D'après (a) on a

$$f(x)-(1+\frac{x}{2})=\frac{x^2}{12}+o_0(x^2)$$

qui est >0 dans un voisinage de $x=0$. Donc D_0 est sous le graphe Γ_f au voisinage du point $(0, f(0))$ (on peut aussi invoquer directement le cours : $f''(0)=\frac{1}{6}>0$ implique que D_0 est sous Γ_f au voisinage de $(0, f(0))$).

4. (2 pts) Donner un équivalent simple de $\sqrt[4]{\sin(x)+x^4}-x$ en $+\infty$.

Au voisinage de $+\infty$ on a

$$\begin{aligned}
\sqrt[4]{\sin(x)+x^4}-x &= x\left(\sqrt[4]{1+\frac{\sin(x)}{x^4}}-1\right) \\
&= x\left(\left(1+\frac{1}{4}\frac{\sin(x)}{x^4}+o_{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x^4}\right)\right)-1\right) \\
&= \frac{1}{4}\frac{\sin(x)}{x^3}+o_{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x^3}\right).
\end{aligned}$$

Donc $\sqrt[4]{\sin(x)+x^4}-x \sim_{+\infty} \frac{1}{4}\frac{\sin(x)}{x^3}$.

5. (4 pts) Soit $x>0$. Donner le développement de Taylor-Lagrange de la fonction sin à l'ordre 3 sur $[0,x]$, puis montrer que pour tout $x \in]0,\frac{\pi}{2}]$ on a

$$x-\frac{x^3}{6}<\sin(x)<x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}.$$

En déduire un nombre rationnel r qui est une approximation de $\sin(0,1)$ à 10^{-5} près.

On a le développement de Taylor-Lagrange

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\sin^{(4)}(\xi)\frac{x^4}{24}=x-\frac{x^3}{6}+\sin(\xi)\frac{x^4}{24}$$

où $\xi \in]0,x[$. Or $0 < \sin(\xi) < 1$ pour $\xi \in]0,x[\subset]0,\frac{\pi}{2}[$, donc $x - \frac{x^3}{6} < \sin(x)$, et $\sin(x) < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$. Ceci prouve la double inégalité. Prenons $x = 10^{-1}$, et $r = 10^{-1} - \frac{10^{-3}}{6}$; r est un nombre rationnel, et la double inégalité implique $0 < \sin(0,1) - r < \frac{10^{-4}}{24} < 10^{-5}$. Donc r est une approximation de $\sin(0,1)$ à 10^{-5} près.

6. (4 pts) On considère la fonction $f(x) := \frac{1}{\ln(1+\sin(x))}$.

(1) Calculer le $DL_2(\frac{\pi}{2})$ de $f(x)$ (on pourra utiliser l'identité $\sin(\frac{\pi}{2}+x) = \cos(x)$.)

Posons $x = \frac{\pi}{2} + h$. On a

$$\begin{aligned}
f(x) = \frac{1}{\ln(1+\sin(\frac{\pi}{2}+h))} &= \frac{1}{\ln(1+\cos(h))} \\
&= \frac{1}{\ln(1+(1-\frac{h^2}{2}+o_0(h^2)))} \\
&= \frac{1}{\ln(2-\frac{h^2}{2}+o_0(h^2))} \\
&= \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{1+\frac{1}{\ln(2)}(\ln(1-\frac{h^2}{4}+o_0(h^2)))} \\
&= \frac{1}{\ln(2)} \times \frac{1}{1+\frac{1}{\ln(2)}(-\frac{h^2}{4}+o_0(h^2))} \\
&= \frac{1}{\ln(2)}\left(1+\frac{1}{4\ln(2)}h^2+o_0(h^2)\right).
\end{aligned}$$

(2) Montrer que f a un minimum local au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$.

D'après (1) et la formule de Taylor-Young pour f à l'ordre 2, on a

$$f'(\frac{\pi}{2}) = 0\,,\ f''(\frac{\pi}{2}) = 2.\frac{1}{4\ln(2)^2} > 0.$$

D'après le cours, ceci implique que f a un minimum local en $x = \frac{\pi}{2}$ (qui vaut $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\ln(2)}$).