MODULE HAX201X
ANNÉE 2024/2025

CC2, 14 avril 2025
Durée : 1 h 15

La correction tiendra compte de la clarté et de la précision de vos arguments.

Documents, calculettes et téléphones portables sont interdits.

Le barème est indicatif.

Questions

1. (2 pts) Soient f et g deux fonctions définies dans un voisinage de $+\infty$.

(a) Rappeler la définition de "$g(x) = o_{+\infty}(f(x))$".

(b) Montrer que si $g(x) \sim_{+\infty} f(x)$, alors $f(x) - g(x) = o_{+\infty}(f(x))$.

2. (3 pts) On considère la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f est dérivable en 0, admet un $DL_1(0)$, mais n'est pas de classe C^1.

3. (5 pts) On pose

$$f(x) := \frac{x}{\ln(1+\sin(x))}.$$

(a) Déterminer le $DL_3(0)$ de $\ln(1+\sin(x))$, puis le $DL_2(0)$ de $f(x)$.

(b) En déduire la valeur des dérivées $f^{(k)}(0)$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

(c) Déterminer l'équation de la tangente D_0 au graphe Γ_f de f au point de coordonnées $(0, f(0))$, et la position de D_0 par rapport à Γ_f.

4. (2 pts) Donner un équivalent simple de $\sqrt[4]{\sin(x) + x^4} - x$ en $+\infty$.

5. (4 pts) Soit $x > 0$. Donner le développement de Taylor-Lagrange de la fonction sin à l'ordre 3 sur $[0, x]$, puis montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on a

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}.$$

En déduire un nombre rationnel r qui est une approximation de $\sin(0,1)$ à 10^{-5} près.

6. (4 pts) On considère la fonction $f(x) := \frac{1}{\ln(1+\sin(x))}$.

(1) Calculer le $DL_2(\frac{\pi}{2})$ de $f(x)$ (on pourra utiliser l'identité $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$.)

(2) Montrer que f a un minimum local au point d'abscisse $x = \frac{\pi}{2}$.